Charaktertheorie endlicher Gruppen

Daniel Bissinger

Kiel, 21.01.2026

Überblick

Charaktere spielen in vielen Gebieten eine Rolle:

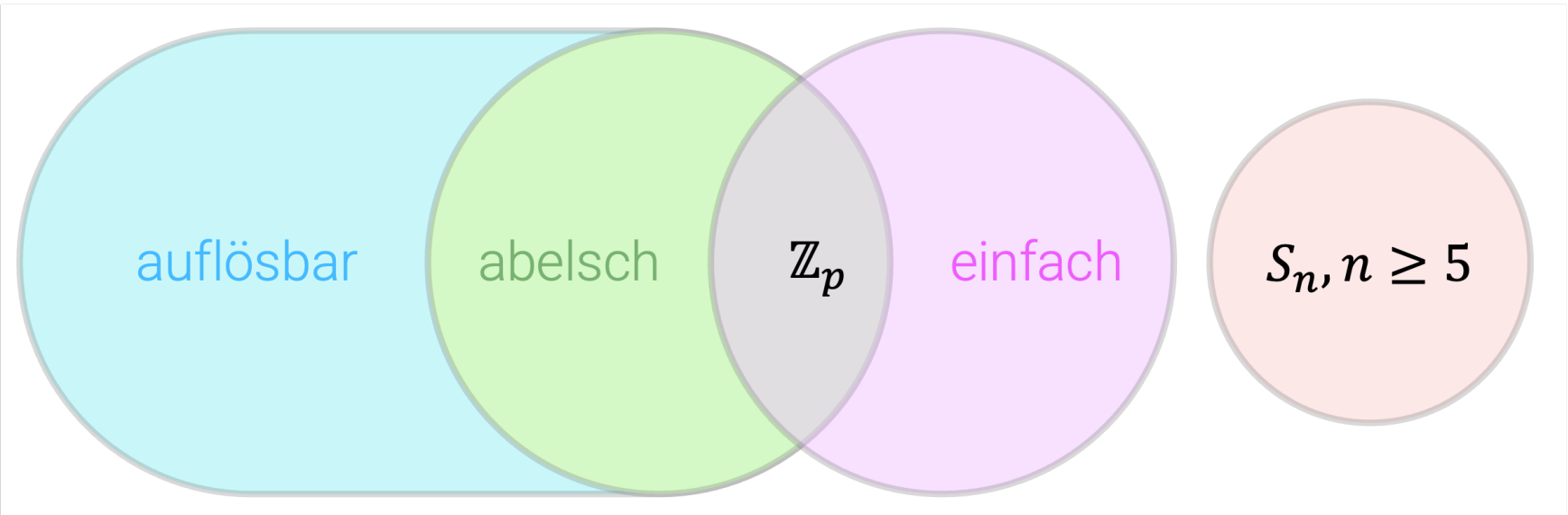
1. Algebraische Gruppen
2. Lie-Algebren
3. Theorie der endlichen Gruppen
   - Grundlegende Eigenschaften von Charakteren
   - Learning by doing: Satz von Burnside (1904)

Auflösbare Gruppen und Burnsides Theorem, I

Endliche abelsche Gruppen sind gut verstanden:

G abelsch $\rightsquigarrow G \cong \mathbb{Z}/(p_1^{n_1}) \times \cdots \times \mathbb{Z}/(p_r^{n_r})$, $p_i \in \mathbb{P}$, $n_i \in \mathbb{N}$.

Auflösbare Gruppen setzen sich aus abelschen Gruppen zusammen.



Auflösbare Gruppen und Burnsides Theorem, II

Lemma

Jede Gruppe von Primzahlpotenz $|G| = p^n$ ist auflösbar.

Beweis.

Annahme: G ist minimales Gegenbeispiel.

- G ist einfach.
- $G = \bigsqcup_{i=1}^{\ell} C_i$ Zerlegung in Konjugationsklassen, $C_1 = \{1\}$.
- $1 + \sum_{i=2}^{\ell} |C_i| = |G| \equiv 0 \bmod(p)$.

$\Rightarrow$ Es existiert $i \in \{2, \ldots, \ell\}$ mit $p \nmid |C_i|$.

$\Rightarrow |C_i| = 1$, da $|C_i|$ Teiler von p^n.

$\Rightarrow \{1\} \neq Z(G) \trianglelefteq G$ und G ist abelsch $\lightning$. □

Auflösbare Gruppen und Burnsides Theorem, III

Theorem (Satz von Burnside, 1904; Bender-Goldschmidt, 1972)

Sei $|G| = p^a q^b$ *mit* $a,b \in \mathbb{N}_0$ *und* $p < q \in \mathbb{P}$, *dann ist* G *auflösbar.*

Beweisansatz

Annahme: G ist minimales Gegenbeispiel.

- G ist einfach mit $a, b > 0$.
- $G = \bigsqcup_{i=1}^{\ell} C_i$ Zerlegung in Konjugationsklassen, $|C_i|$ teilt $p^a q^b$.
- $1 + \sum_{i=2}^{\ell} |C_i| = |G| \equiv 0 \bmod(pq) \overset{?}{\Rightarrow} \exists i \in \{2, \ldots, \ell\} : |C_i| = 1.$

Problem: $|G| = 6 = 2 \cdot 3$ mit $6 = 1 + 2 + 3$.

$$G = \mathcal{S}_3\colon\ C_2 = \{(1,2,3),(1,3,2)\}, C_3 = \{(1,2),(2,3),(1,3)\}.$$

Theorem (Burnside, 1904)

Existiert C_i *mit* $|C_i| = p^k$ $(k > 0)$, *dann ist* G *nicht einfach.*

Darstellungen und Operationen, I

Darstellungen $\subseteq$ Gruppenoperationen liefern Informationen über G.

"Show me your friends, and I'll tell you who you are (up to isomorphism)."

Seien $X \neq \varnothing$ Menge und V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit $\dim V < \infty$.

1. Operation: (X, ρ), $\rho\colon G \to Sym(X)$ Homomorphismus.
   - G-Abbildung $f : X \to Y : \rho_Y(g) \circ f = f \circ \rho_X(g)$ für alle $g \in G$.
   - G-invariante Teilmenge $S \subseteq X$: $\rho(g)(S) \subseteq S$ für alle $g \in G$.
2. Darstellung: (V, ρ), $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V) \subseteq Sym(V)$ Homomorphismus.
   - Lineare G-Abbildungen $\rightsquigarrow$ Kategorie $\mathrm{rep}(G)$ der Darstellungen.
   - G-invarianter Untervektorraum $U \subseteq V$ (Unterdarstellung).

Trade-off: weniger Operationen, dafür Lineare Algebra.

Darstellungen und Operationen, II

Definition (Analogon der transitiven Operation)

Eine Darstellung (V, ρ) heißt irreduzibel, falls $\{0\} \subsetneq V$ die einzigen Unterdarstellungen sind.

Beispiele

1. Die triviale Darstellung $\mathbb{C}_{\text{triv}} = \mathbb{C}$ mit $\rho_{\mathbb{C}_{\text{triv}}} \equiv \text{id}_{\mathbb{C}}$ ist irreduzibel.
2. Die reguläre Darstellung $\mathbb{C}G := \bigoplus_{g \in G} \mathbb{C}g$ mit $\rho_{\mathbb{C}G}(g)(h) := gh$ ist nicht irreduzibel für $G \neq \{1\}$, da $\mathbb{C}_{\text{triv}} \cong \mathbb{C}(\sum_{g \in G} g) \subseteq \mathbb{C}G$.

Theorem (Maschke, 1899; Schur, 1905)

Es sei V eine Darstellung.

1. *Es existiert eine Zerlegung $V = \bigoplus_{i=1}^{\ell} V_i$ mit V_i irreduzibel.*
2. *Ist V irreduzibel, so gilt $\text{Hom}_G(V, V) = \mathbb{C}\,\text{id}_V$.*

Charaktere, I

Definition

Es sei (V,ρ) eine Darstellung. Der Charakter von V ist die Abbildung

$$\chi_V : G \to \mathbb{C} \; ; \; \chi_V(g) := \mathrm{Tr}(\rho(g)).$$

1. $\chi_V(1) = \dim V$
2. $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$
3. $\chi_{V \otimes_{\mathbb{C}} W} = \chi_V \cdot \chi_W$
4. $\chi_V(gxg^{-1}) = \chi_V(x)$ (Klassenfunktion)

Charaktere, II

$\mathrm{Map}(G, \mathbb{C})$ endl. dimensionaler unitärer Vektorraum bezüglich

$$\langle \chi, \psi \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} \psi(g).$$

Theorem (1. schursche Orthogonalitätsrelation)

V, W irreduzibel: $\langle \chi_V, \chi_W \rangle \in \{0, 1\}$ mit $\langle \chi_V, \chi_W \rangle = 1 \Leftrightarrow V \cong W$.

Korollar

1. *Es ex. nur endlich viele irreduzible Darstellungen $V_1, \ldots, V_\ell / \sim_{Iso}$.*
2. *Es gilt $\mathbb{C}G \cong \bigoplus_{i=1}^{\ell} V_i^{\dim V_i}$.*
3. *$V \cong W \Leftrightarrow \chi_V = \chi_W$.*
4. *Charaktere realisieren $K_0(G)$ als Untergruppe von $\mathrm{Cl}(G, \mathbb{C})$.*

Charaktere, III

Warum liefern Charaktere so viele Informationen?

Für $g \in G$ und (V, ρ) Darstellung gilt

$$\rho(g)^{\mathrm{ord}(g)} = \rho(g^{\mathrm{ord}(g)}) = \mathrm{id}_V \implies \mu_{\rho(g)} | X^{\mathrm{ord}(g)} - 1 \in \mathbb{C}[X].$$

Konsequenzen

1. $\rho(g)$ ist ganz: Es existiert $p \in \mathbb{Z}[X]$ normiert mit $p(\rho(g)) = 0$.
2. $\rho(g) \sim \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{\dim V})$, $\chi(g) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_{\dim V} \in \mathbb{C}$, λ_i EW.
3. χ kennt das char. Polynom von $\rho(g)$. (Newton-Identitäten)

Anwendung: Burnsides Theorem, I

Proposition

Sei C Konjugationsklasse mit $|C| = p^k (k > 0)$. Es ist G nicht einfach, falls $V \not\cong \mathbb{C}_{\text{triv}}$ irreduzibel mit $p \nmid \dim V$ und $\chi(C) \neq \{0\}$ existiert.

Beweis.

Schritt 1: Für $c \in C$ gilt $\rho(c) \in Z(\mathrm{GL}(V))$.

Schritt 2: Da $|C| > 1$, existiert $g \in G$ mit $gcg^{-1}c^{-1} \neq 1$. Es folgt

$$\rho(gcg^{-1}c^{-1}) = \rho(g)\rho(c)\rho(g)^{-1}\rho(c)^{-1} = \mathrm{id}_V,$$

und damit $\{1\} \neq \ker \rho \subsetneq G$, da $V \not\cong \mathbb{C}_{\text{triv}}$.

Anwendung: Burnsides Theorem, II

Beweisskizze Schritt 1

- $f := \sum_{g \in C} \rho(g) : V \to V$ ist ganz, G-linear mit $\mathrm{Tr}(f) = \chi(c)|C|$.
- Schur: $f = \mu \,\mathrm{id}_V$, $\mu \in \mathbb{C}$ ganz.
- Bézout: $a|C| + b \dim V = \mathrm{ggT}(\dim V, |C|) = 1$. (Voraussetzung)
- $$\frac{\chi(c)}{\dim V} = a \cdot \frac{\chi(c)|C|}{\dim V} + b \cdot \chi(c) = a \cdot \mu + b \cdot \chi(c) \text{ ganz.}$$
- $$\frac{\chi(c)}{\dim V} = \frac{\lambda_1 + \ldots + \lambda_{\dim V}}{\dim V} \in \mathbb{D} \setminus \{0\}. \quad \text{(Voraussetzung)}$$
- $$N_{\mathbb{Q}(\chi(c)):\mathbb{Q}}\left(\frac{\chi(c)}{\dim V}\right) \in (\mathbb{D} \setminus \{0\}) \cap \mathbb{Q}^{ganz} = \{\pm 1\}.$$

$$\rightsquigarrow \left|\frac{\chi(c)}{\dim V}\right| = 1, \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{\dim V} \text{ und } \rho(c) = \lambda_1 \mathrm{id}_V \in Z(\mathrm{GL}(V)).$$

Anwendung: Burnsides Theorem, III

Korollar (Burnside)

Existiert C mit $|C| = p^k$ $(k > 0)$, dann ist G nicht einfach.

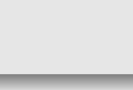
Beweis.

Wähle $c \in C$ und schreibe $\mathbb{C}G = \bigoplus_{i=1}^{\ell} V_i^{\dim V_i}$ mit $V_1 \cong \mathbb{C}_{\text{triv}}$.

O.B.d.A. $p \mid \dim V_i$ für alle $i > 1$ mit $\chi_{V_i}(c) \neq 0$.

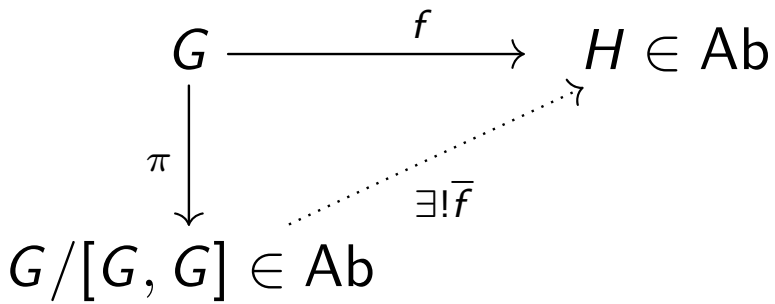
$$0 = \chi_{\mathbb{C}G}(c) = \sum_{i=1}^{\ell} (\dim V_i)\chi_{V_i}(c) = 1 + p\left(\sum_{i>1, \chi_{V_i}(c)\neq 0} \frac{\dim V_i}{p}\chi_{V_i}(c)\right).$$

Also $\frac{-1}{p} \in \mathbb{Q}^{\textit{ganz}} = \mathbb{Z}$ ↯.



Ausblick

Die Kommutatorgruppe $[G, G] \trianglelefteq G$ ist charakterisiert durch



Es gilt $[G, G] = \{ghg^{-1}h^{-1} \mid g, h \in G\}$ für G einfach (Ore, 1951).

- G abelsch. ✓
- G nicht abelsch, dann gilt $G = [G, G]$.

Theorem (Liebeck–O'Brien–Shalev–Tiep, 2010)

Ist G einfach und nicht-abelsch, so ist jedes Element ein Kommutator.

Thompsonsche Vermutung

Ist G einfach und nicht-abelsch, so existiert $C \subseteq G$ mit $C^2 = G$.

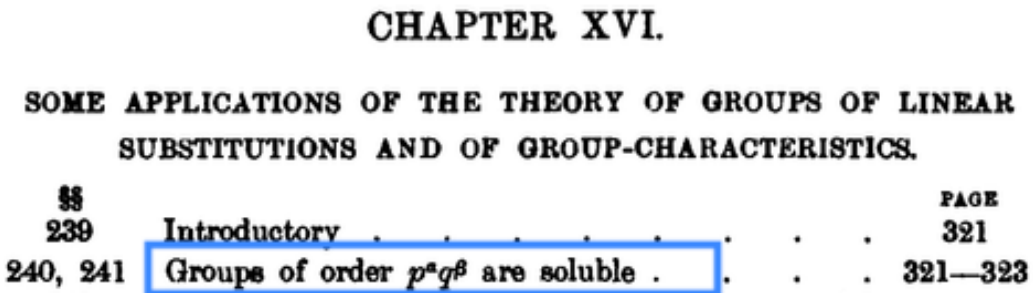
Abschluss

Burnside (1897):

> *"[...] it would be difficult to find a result that could be most directly obtained by the consideration of [linear representations]."*

Burnside (1911):

> *"Five Chapters, XIII to XVII, are devoted to the theory of groups of linear substitutions, including their invariants."*



CHAPTER XVI.

SOME APPLICATIONS OF THE THEORY OF GROUPS OF LINEAR SUBSTITUTIONS AND OF GROUP-CHARACTERISTICS.

§§		PAGE
239	Introductory	321
240, 241	Groups of order $p^\alpha q^\beta$ are soluble	321—323

Charaktertafel S_4

Kl.-Größe	1	6	3	8	6
Repr.	e	(12)	$(12)(34)$	(123)	(1234)
$\chi^{(4)}$	1	1	1	1	1
$\chi^{(1^4)}$	1	-1	1	1	-1
$\chi^{(2,2)}$	2	0	2	-1	0
$\chi^{(3,1)}$	3	1	-1	0	-1
$\chi^{(2,1,1)}$	3	-1	-1	0	1

Originalbeweis, I

A group of finite order g is said to be *represented* as an *irreducible* group of linear substitutions on m variables when g is simply or multiply isomorphic with the group of linear substitutions, and when it is impossible to choose $m'\,(<m)$ linear functions of the variables which are transformed among themselves by every operation of the group. Any two conjugate operations of the group when brought to canonical form have the same multipliers. The sum of these multipliers is called the *characteristic* of the set of conjugate operations, or of any one of them, for the mode of representing the group in question; and the characteristics of the different sets of conjugate operations for one and the same mode of representation are called a *set* of characteristics. If g is multiply isomorphic with the group of linear substitutions, every operation of the self-conjugate sub-group of g which corresponds to the identical operation of the group of linear substitutions has m (the number of variables) for its characteristic. In particular every group is multiply isomorphic with the group

$$x' = x,$$

constituted by the identical operation only; so that among the

Originalbeweis, II

Suppose that in a group G of finite order the number of operations which constitute one conjugate set (say the i-th) is the power of a prime, so that $h_i = p^{\alpha}$. If χ_i is the corresponding characteristic in an irreducible representation of G, then $h_i\chi_i/\chi_1$ is an algebraic integer; and therefore, if h_i and χ_1 are relatively prime, *i.e.*, if χ_1 is not divisible by p, χ_i/χ_1 is an algebraic integer. Hence, as above, either χ_i is zero or $\chi_i = \chi_1\omega$, where ω is a root of unity. In the latter case every operation of the i-th conjugate set is a self-conjugate substitution in the irreducible representation under consideration and G is therefore composite.

Originalbeweis, III

Now consider the relation $\sum_s \chi_1^s \chi_i^s = 0$,

where the summation extends to the r distinct irreducible representations of G. If no χ_1, except the first, is unity, and if χ_i is zero whenever χ_1 is not divisible by p, this equation is of the form $1 + p\alpha = 0$, where α is an algebraic integer, which is impossible. Hence either (i) some χ_1, other than the first, is unity, in which case G is isomorphic with a cyclical group, or (ii) some χ_i is equal to $\chi_1 \omega$, in which case G has a self-conjugate sub-group containing the i-th set. In either case G is composite. Hence :—

Theorem.—If in a group of finite order the number of operations in any one conjugate set is the power of a prime, the group is composite.

From this the previous result follows immediately. For in a group of order $p^\alpha q^\beta$ there are necessarily conjugate sets, the numbers of operations in which are powers of primes. In fact the self-conjugate operations of a sub-group of order p^α (or q^β) belong to such sets.