Daniel Bissinger **Mathematik für die Geowissenschaften I**
WS 23/24

Übungsserie 12

Aufgabe 45. (1+1+1+1 Punkte)

(1) Berechnen Sie $A \cdot B$ und $B \cdot A$ mit $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(2) Es seien $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ in $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass $A \cdot B = \begin{pmatrix} a \cdot c & 0 \\ 0 & b \cdot d \end{pmatrix}$ gilt.

(3) Berechnen Sie A^{3000} für $A = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & \frac{-8}{3} & -4 \\ \frac{-4}{3} & \frac{-11}{3} & -4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

(4) Berechnen Sie A^2 für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 46. (1+1+1+1 Punkte) Untersuchen Sie, ob folgende Matrizen in Zeilenstufenform sind. Ist die Matrix in Zeilenstufenform, zeichnen Sie die Stufen ein. Ist die Matrix nicht in Zeilenstufenform, so begründen warum dies nicht der Fall ist.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(2) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(3) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(4) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 47. (2+2 Punkte) Bestimmen Sie eine Zeilenstufenform der erweiteren Koeffizientenmatrix $(A|b)$ und bestimmen Sie anschließend $\mathbb{L}(A, b)$ in folgenden Fällen.

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 48. (1+1+2 Punkte) Fibonacci hat im Jahr 1202 die heute nach ihm benannte *Fibonacci-Folge* verwendet, um das Wachstum einer Kaninchen-Population zu beschreiben. Dem Modell liegt folgende Annahme zu Grunde: Jedes Paar erwachsener Kaninchen wirft pro Monat ein Paar Junge. Diese werden nach einem Monat erwachsen und vermehren sich entsprechend. (Tod, Unfruchtbarkeit etc. werden vernachlässigt). Wir setzen $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Damit gilt für die Anzahl a_n der Kaninchen-Paare zum Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Wir erhalten die Fibonacci-Folge

$$0\ 1\ 1\ 2\ 3\ 5\ 8\ 13\ \ldots$$

In dieser Aufgabe beweisen Sie eine Gleichung, mit der für $n \in \mathbb{N}_0$ die n-te Fibonacci-Zahl nicht-rekursiv berechnet werden kann. Wir verwenden dafür Matrizen. Obige Gleichung lässt sich für $n \in \mathbb{N}$ wie folgt durch Matrizen ausdrücken:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Es folgt durch wiederholte Anwendung für $n \in \mathbb{N}_0$ die Gleichung

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrizen

$$S := \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, D := \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \text{ und } T := \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{5}}{5} & \frac{5-\sqrt{5}}{10} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{5+\sqrt{5}}{10} \end{pmatrix}$$

erfüllen die Gleichung $SDT = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (dies müssen Sie nicht nachrechnen).

(1) Zeigen Sie, dass $TS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt.

(2) Schließen Sie unter Verwendung von $SDT = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und (1), dass für $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = SD^nT$$

gilt.

(3) Schließen Sie aus (2), dass für $n \in \mathbb{N}_0$ die Gleichung

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

gilt.

Abgabetermin: Bis 08.02.24 um 12:00 Uhr im OLAT. Die Punkte dieser Übungserie spielen für die Klausurzulassung keine Rolle.