Daniel Bissinger **Mathematik für die Geowissenschaften I**
WS 23/24

Übungsserie 6

Aufgabe 21. (1+1+1+1 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte von Funktionen.

(1) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{-x^4+2x+1}{x^2+3x}$.
(2) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$.
(3) $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(x)+\ln(\frac{5}{x}))$
(4) $\lim\limits_{x\to -1} \sin(\frac{x^2+2x+1}{x+1})$

Hinweis: Denken Sie an die binomischen Formeln.

Aufgabe 22. (1+1+2 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

(1) Es gilt $\ln(a+b)=\ln(a)\ln(b)$ für alle $a,b\in\mathbb{R}_{>0}$.
(2) Es gilt $\ln(a+b)=\ln(a)+\ln(b)$ für alle $a,b\in\mathbb{R}_{>0}$.
(3) Es gilt $\ln(1+2+3)=\ln(1)+\ln(2)+\ln(3)$.

Aufgabe 23. (4 Punkte) Es sei $\lambda\in\mathbb{R}$ und $N_0\in\mathbb{R}_{>0}$. Durch den Zerfall einer radioaktiven Substanz verändert sich das Gewicht $N(t)$ (gemessen in mg) der Substanz mit der Zeit $t\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ gemäß der Formel

$$N(t)=N_0e^{\lambda t}.$$

Hierbei wird t in Sekunden gemessen. Nach $\ln 3$ Sekunden liegen noch $\frac{1}{3}$ des Gewichts vom Zeitpunkt $t=0$ vor. Nach 10 Sekunden beträgt das Gewicht e^{10}. Bestimmen Sie das Gewicht zum Zeitpunkt $t=20-\ln 30$.

Aufgabe 24. (2+1+1 Punkte) Ihre Kapitalanlage $K_0>0$ wird jährlich bei einem Zinsfuß von $\frac{p}{100}$ (z.B. steht $\frac{1}{100}$ für 1 Prozent) verzinst. Damit berechnet sich das Kapital K_n nach n Jahren durch die Formel

$$(*)\quad K_n=K_0(1+\frac{p}{100})^n.$$

In der Zinsrechnung wird eine Faustregel unter dem Namen 70er-Regel oder 69er-Regel verwendet. Diese besagt: Es sei $0<p\leq 25$. Die Zeit n (in Jahren), in der sich die Kapitalanlage K_0 zum Zinsfuß $\frac{p}{100}$, verdoppelt ist ungefähr $n\approx\frac{70}{p}$.

(1) Leiten Sie aus der Gleichung $(*)$ her, wie man auf diese Faustregel kommt. Dabei dürfen Sie folgende Tatsachen ohne Beweis benutzen:
   (i) Für $0 < x \leq \frac{1}{4}$ gilt $\ln(1+x) \approx x$.
   (ii) Es gilt $\ln(2) \approx 0.7$.
(2) Zu welchem Zinssatz (d.h. Prozent) müssen Sie Ihr Kapital K_0 anlegen, damit es sich in 12 Jahren mindestens verdoppelt hat. Benutzen Sie hierfür die 70er-Regel.
(3) Berechen Sie mithilfe von $(*)$ und dem Taschenrechner/Computer den genauen Zinssatz in der Aufgabenstellung (2). Hinweis: Sie benötigen hier nur den genauen Wert von $2^{\frac{1}{12}}$.

Abgabetermin: Bis 07.12.23 um 12:00 Uhr im OLAT.