Daniel Bissinger **Mathematik für die Geowissenschaften I**
WS 23/24

Übungsserie 5

Aufgabe 17. (1+1+1+1 Punkte) Berechnen Sie bei folgenden Reihen jeweils die ersten drei Partialsummen.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
(2) $\sum_{n=2}^{\infty}(1+\frac{1}{n})$.
(3) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\cos(\frac{n}{2}\pi)}{3n}$.
(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(n^3+\frac{1}{n})$.

Aufgabe 18. (1+1+2 Punkte)

(1) Es seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ Reihen. Beurteilen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie ihre Antworten.
   (a) Sind $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent mit Grenzwerten $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ konvergent mit Grenzwert $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$.
   (b) Sind $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent mit Grenzwerten $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cdot b_n)$ konvergent mit Grenzwert $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.
(2) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $\sum_{n=10}^{\infty}(\frac{1}{2})^n$.
   Hinweis: Verwenden Sie Beispiel 2.9.

Aufgabe 19. (1+1+1+1 Punkte) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und berechnen Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert.

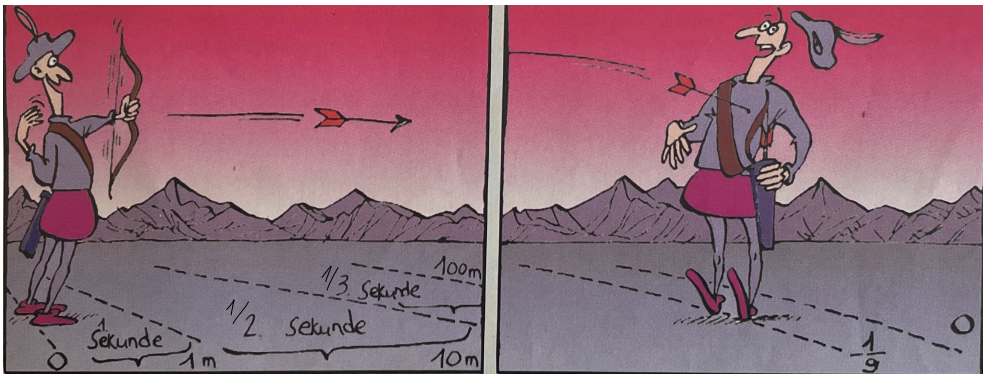
(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{7^n}$.
(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{-5}{3})^n$.
(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(-3)^n}$.
(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{3^n}$

Aufgabe 20. (4 Punkte + 4 Bonuspunkte)

(1) Sie zahlen am Anfang jeden Jahres bei der Bank einen Betrag von $R > 0$ ein. Direkt nach der Einzahlung erhalten Sie einen Jahreszinssatz von 50 Prozent an auf Ihr Kapital. Für $\ell \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit K_ℓ das Kapital nach n Jahren. Insbesondere gilt $K_1 = (1.5)R$ und $K_2 = (1.5)(K_1 + R) = 1.5^2R + 1.5R$, $K_3 = (1.5)(K_2+R) = 1.5(1.5^2R+1.5R)+1.5R = 1.5^3R+1.5^2R+1.5R$ usw. Berechnen Sie

K_{10} wenn $R = 100$ gilt. Sie dürfen für diese Aufgaben verwenden, dass $(\frac{3}{2})^{10} \approx 57.66$ gilt.

(2) Folgende Illustration von J.M. Thiriet ist einer Spektrum der Wissenschaft Ausgabe entnommen.



Dazu gibt es den folgenden Text: „Der von dem Bogenschützen abgeschossene Pfeil durchfliegt einen Meter in der ersten Sekunde, 10 Meter in der nächsten halben Sekunde, 100 Meter in der nächsten Viertelsekunde und so weiter. Nachdem der Schütze den Pfeil abgeschossen hat, dreht er sich um, legt in zwei Sekunden gemächlich $\frac{1}{9}$ Meter zurück - und wird von dem Pfeil durchbohrt, der von der »falschen« Seite aus dem Unendlichen kommt!“

Interpretieren Sie dieses Paradoxon im Zusammenhang mit der divergenten Reihe $s_n := \sum_{i=0}^{n} 10^i$.

Abgabetermin: Bis 30.11.23 um 12:00 Uhr im OLAT.