Daniel Bissinger **Mathematik für die Geowissenschaften I**
WS 23/24

Übungsserie 4

Aufgabe 13. (1+1+1+1 Punkte) Berechen Sie für jede angegebene Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die ersten sechs nicht gegebenen Folgenglieder.

(1) $a_n = n^2 - (n-1)^2$ für $n \geq 1$.
(2) $a_n = (-1)^{n-1} \cdot 2^{n-1}$ für $n \geq 1$.
(3) $a_1 = 1, a_2 = 1$, $a_n := a_{n-1} + a_{n-2}$ für $n \geq 3$.
(4) $a_n = \begin{cases} 5 & n \text{ ist Primzahl} \\ 2 & n \text{ ist keine Primzahl.} \end{cases}$

Aufgabe 14. (1+1+2 Punkte) Bestimmen Sie die Grenzwerte

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2-3n+3}{3n^2-n}$,
(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^5-7n^2+4}{\frac{3}{2}n^5+\sqrt{3}n^2+n}$, und
(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4^n+2^n}{\sqrt{7}\cdot 4^n(1+\frac{2}{n})}$.

Aufgabe 15. (1+1+1+1 Punkte) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen. Beurteilen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie ihre Antworten.

(1) Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, so auch die Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(2) Konvergieren $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und die Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(3) Konvergieren $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(4) Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = 0$.

Aufgabe 16. (2 Bonuspunkte + 1+1+2 Punkte) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a und $m \geq 0$ fest gewählt. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $b_n := a_{n+m}$.

(1) Zeigen Sie, dass auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit Grenzwert a. Verwenden Sie für den Nachweis die Definition 2.1.
(2) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge definiert in Aufgabe 13(3). Wir definieren eine neue Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $c_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen als gegeben voraus, dass $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist und wir wissen, dass $a_{n+1} > a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Im Folgenden wollen wir den Grenzwert $c := \lim\limits_{n\to\infty} c_n$ berechnen. Gehen Sie dafür wie folgt vor.

(i) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n+1}}{a_n}$ gilt.

(ii) Schließen Sie mithilfe von (1) und (i), dass c die Gleichung $c^2 - c = 1$ erfüllt.

(iii) Berechnen Sie c.

Aufgabenteil (1) ist die Bonusaufgabe.

Abgabetermin: Bis 23.11.23 um 12:00 Uhr im OLAT.