Mathematik für die Geowissenschaften I **Klausur vom 08.04.2024**

Hinweise

- Diese Klausur besteht aus 7 Aufgaben in denen jeweils 10 Punkte erreicht werden können. Die mögliche Gesamtpunktzahl beträgt also 70 Punkte.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben bitte direkt unter der Aufgabenstellung. Sollte der Platz nicht ausreichen, fahren Sie auf der entsprechenden Rückseite fort und kennzeichnen Sie dies entsprechend auf der Vorderseite.
- Begründen Sie Ihre Aussagen und vereinfachen Sie Ergebnisse stets so weit wie möglich.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Neben Schreibzeug, Ausweis/Studierendenausweis und Verpflegung dürfen keine weiteren Gegenstände mit an den zugewiesenen Arbeitsplatz genommen werden.
- Sie dürfen innerhalb einer Aufgabe einen vorangegangenen Aufgabenteil auch dann verwenden, wenn Sie diesen Teil nicht bearbeitet haben.

Viel Erfolg!

Mathematik für die Geowissenschaften I **Klausur vom 08.04.2024**

Aufgabe 1. (10 Punkte) Diese Aufgabe besteht aus 10 Aussagen. Entscheiden Sie jeweils, ob die Aussage wahr oder falsch ist und setzen Sie bei jeder Aussage genau ein Kreuz.

Richtig gesetzte Kreuze geben 1 Punkt und falsch gesetzte Kreuze geben keinen Punkt. Wenn Sie ein gesetztes Kreuz korrigieren wollen, füllen Sie die Box mit dem falsch gesetzten Kreuz aus und markieren Sie die andere Box mit einem Kreuz.

Es gilt $(\{1\} \cap \{2\}) \cup \{2\} = \{2\} \cap (\{2\} \cup \{1\})$. ☐ wahr ☐ falsch

Jede surjektive Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist injektiv. ☐ wahr ☐ falsch

Jede bijektive Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist injektiv. ☐ wahr ☐ falsch

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. ☐ wahr ☐ falsch

Die Betragsfunktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto |x|$ ist stetig. ☐ wahr ☐ falsch

Es gilt $\sin(x) > \sin(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > y$. ☐ wahr ☐ falsch

Es gilt $\ln(6) = \ln(2) + \ln(3)$. ☐ wahr ☐ falsch

Es gilt $\langle (1, 0, -1)^T, (1, 2, 3)^T \rangle = 0$. ☐ wahr ☐ falsch

Es gilt $\det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 0$. ☐ wahr ☐ falsch

Für alle Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ gilt $A + B = B + A$. ☐ wahr ☐ falsch

Aufgabe 2. (3+3+2+2 Punkte) Gegeben seien die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}; a \mapsto e^{2a}$$

und

$$g\colon \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \ln(x^2).$$

(1) Berechnen Sie $(g \circ f)(3)$ und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.
(2) Berechnen Sie $(f \circ g)(3)$ und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.
(3) Bestimmen Sie ein $a \in \mathbb{R}$ mit $f(a) = 3$.
(4) Bestimmen Sie ein $x \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $g(x) = 4$.

Lösung:

(1) Es gilt
$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(e^6) = \ln(e^6 \cdot e^6) = \ln(e^{12}) = 12.$$
(2) Es gilt
$$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(\ln(3^2)) = f(\ln(9)) = e^{2\ln(9)} = e^{\ln(9^2)} = 9^2 = 81.$$
(3) Die Gleichung $e^{2a} = f(a) = 3$ liefert nach Anwendung von $\ln(-)$ die Gleichung $\ln(3) = \ln(e^{2a}) = 2a$ und damit $a = \frac{\ln(3)}{2}$.
(4) Die Gleichung $\ln(x^2) = g(x) = 4$ mit $x > 0$ liefert nach Anwendung von e die Gleichung $e^4 = e^{\ln(x^2)} = x^2$ und damit $x = \sqrt{e^4} = e^2$, da $x > 0$ ist.

Aufgabe 3. (3+3+4 Punkte)

(1) Berechnen Sie den Grenzwert der konvergenten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \frac{6n^4 + 4n^3 - 5n^2}{2n^4 + 1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

(2) Berechnen Sie den Grenzwert der konvergenten Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$b_n := \frac{4^n - 7^n}{4^{n+1} - 7^{n+2}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

(3) Begründen Sie, warum der Grenzwert $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{2^n}{4^n}$ existiert und berechnen Sie anschließend den genauen Wert.

Lösung:

(1) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $a_n = \frac{6n^4+4n^3-5n^2}{2n^4+1} = \frac{n^4}{n^4}\frac{6+\frac{4}{n}-\frac{5}{n^2}}{2+\frac{1}{n^4}} = \frac{6+\frac{4}{n}-\frac{5}{n^2}}{2+\frac{1}{n^4}}$. Wir erhalten

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{6 + \frac{4}{n} - \frac{5}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^4}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 6 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^4}} = \frac{6+0-0}{2+0} = 3.$$

(2) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$b_n = \frac{4^n - 7^n}{4^{n+1} - 7^{n+2}} = \frac{7^n}{7^{n+2}} \frac{(\frac{4}{7})^n - 1}{\frac{1}{7}(\frac{4}{7})^{n+1} - 1} = \frac{1}{49} \frac{(\frac{4}{7})^n - 1}{\frac{1}{7}(\frac{4}{7})^{n+1} - 1}.$$

Wir erhalten

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{49} \frac{\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{4}{7})^n - \lim\limits_{n\to\infty} 1}{\frac{1}{7} \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{4}{7})^{n+1} - \lim\limits_{n\to\infty} 1} = \frac{1}{49} \frac{0-1}{0-1} = \frac{1}{49}.$$

(3) Da $\frac{2^n}{4^n} = (\frac{1}{2})^n$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt und $0 < |\frac{1}{2}| < 1$ gilt, existiert nach Vorlesung der Grenzwert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$. Damit gilt

$$\begin{aligned}\sum_{n=4}^{\infty} \frac{2^n}{4^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n - \sum_{n=1}^{3} (\frac{1}{2})^n = 1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}) \\ &= 1 - \frac{4+2+1}{8} = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

Alternativ gilt mit derselben Begründung

$$\sum_{n=4}^{\infty}(\frac{1}{2})^n = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^{n+3} = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n \cdot (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n = \frac{1}{8}.$$

Aufgabe 4. (3+2+2+3 Punkte)
Es sei $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(1) Zeigen Sie, dass $f'(x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
(2) Zeigen Sie unter Verwendung von (1), dass $f'(x) = 1 - 2\sin(x)^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
(3) Berechnen Sie $f'(\frac{\pi}{2})$.
(4) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} f'(x)dx.$$

Lösung:

(1) Es gilt mit der Produktregel

$$f'(x) = \sin'(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot \cos'(x) = (\cos(x))^2 - (\sin(x))^2.$$

(2) Es gilt nach Vorlesung $(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$. Damit gilt nach (1) die Gleichung

$$f'(x) = (\cos(x))^2 - (\sin(x))^2 = (1 - (\sin(x))^2) - \sin(x)^2 = 1 - 2(\sin(x))^2.$$

(3) Es gilt $f'(\frac{\pi}{2}) = 1 - 2\sin(\frac{\pi}{2})^2 = 1 - 2 \cdot 1^2 = -1$.
(4) Es ist f eine Stammfunktion von f'. Damit gilt

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} f'(x)dx = f\big|_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} = f(2\pi) - f(\frac{\pi}{2}) = \sin(2\pi) \cdot \cos(2\pi) - \sin(\frac{\pi}{2}) \cdot \cos(\frac{\pi}{2}) = 0 - 0 = 0,$$

da $\sin(2\pi) = 0 = \cos(\frac{\pi}{2})$.

Aufgabe 5. (6+4 Punkte)

(1) Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R};\, f(x,y) = xy^2 - x.$$

(2) Untersuchen Sie, ob es sich bei den in (1) bestimmten kritischen Punkten um ein lokales Minimum bzw. lokales Maximum handelt.

Lösung:

(1) Wir berechnen die partiellen Ableitungen. Es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 - 1 \text{ und } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy.$$

Die kritischen Punkte erfüllen $y^2 - 1 = 0$ und $2xy = 0$. Die erste Gleichung liefert $y \in \{-1, 1\}$ und damit folgt aus der zweiten Gleichung $x = 0$. Das heißt die kritischen Punkte sind $(0,1)$ und $(0,-1)$.

(2) Wir berechnen die zweiten partiellen Ableitungen und erhalten

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) = 2x \text{ und } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2y = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y).$$

Das heißt

$$D(f)(x,y) = (0)(2x) - (2y)^2 = -4y^2.$$

Es gilt also $D(f)(0,1) = -4 < 0$ und $D(f)(0,-1) = -4 < 0$. Nach Satz 2.50 der Vorlesung sind damit $(0,1)$ und $(0,-1)$ keine lokalen Extremstellen.

Aufgabe 6. (4+2+3+1 Punkte)

(1) Es sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 9 & 6 & 18 \\ 2 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{R})$.

(a) Bringen Sie A durch elementare Zeilenumformungen in Zeilenstufenform.

(b) Die in (a) erhaltene Matrix in Zeilenstufenform sei mit B bezeichnet. Bestimmen Sie den Rang r_B von B und die zugehörigen Elemente $s(1), \ldots, s(r_B)$.

(2) (a) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

(b) Ist die Matrix aus (a) invertierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 9 & 6 & 18 \\ 2 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} Z_2-3\cdot Z_1 \\ Z_3-2\cdot Z_1 \\ Z_4-1\cdot Z_1 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \overset{Z_2\leftrightarrow Z_4}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ Z_3+4\cdot Z_2 \\ \\ \end{matrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ Z_3\cdot\frac{1}{4} \\ \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: B.$$

Diese Matrix B ist in Zeilenstufenform. Weiter gilt damit $r_B = 3$, da 3 die Anzahl der Nicht-Nullzeilen ist. Weiter gilt $s(1) = 1, s(2) = 2$ und $s(3) = 3$. Da dies gerade die Spalten sind, die die ersten Nichtnulleinträge (von links) enthalten.

(2) (a) Gemäß der Formel aus Beispiel 3.31 aus der Vorlesung gilt

$$\det(A) = (1\cdot 0\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 1 + 3\cdot 0\cdot 0) - (1\cdot 0\cdot 3 + 0\cdot 2\cdot 1 + 1\cdot 0\cdot 2) = 4 - 0 = 4.$$

(b) Nach (a) ist $\det(A) = 4 \neq 0$. Damit ist A nach Satz 3.35 der Vorlesung invertierbar.

Aufgabe 7. (6+4 Punkte)

(1) Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto ax^2 + bx + c$ sei eine Polynomfunktion mit folgenden Eigenschaften:
   (a) $g'(0) = 3$,
   (b) $g''(1) = 6$,
   (c) $(1, 6) \in G_g$, wobei G_g den Graph von g bezeichnet.
   Bestimmen Sie a, b, c und berechnen Sie anschließend $g(-1)$.

(2) Bestimmen Sie einen Vektor $w = (w_1, w_2, w_3)^T \in \mathbb{R}^3$, der gleichzeitig alle vier folgenden Eigenschaften besitzt.
   (a) Es gilt $\langle w, (0, 0, 1)^T \rangle = 1$.
   (b) Die Vektoren $(1, -3, 0)^T$ und w sind orthogonal.
   (c) Die Länge von w ist $\sqrt{11}$.
   (d) Es gilt $w_2 > 0$.

Lösung:

(1) Es gilt $g'(x) = 2ax + b$ und $g''(x) = 2a$. Wir erhalten mit (a) die Gleichung $3 = g'(0) = b$ und mit (b) ergibt sich $6 = g''(1) = 2a$, also $3 = a$. Weiter liefert (c) uns $6 = g(1) = a + b + c = 3 + 3 + c$, das heißt $c = 0$. Wir erhalten $g(-1) = 3(-1)^2 + 3(-1) + 0 = 0$.

(2) Es sei $w = (w_1, w_2, w_3)^T$ ein Vektor der (a)-(d) erfüllt. Nach (a) gilt

$$1 = \langle w, (0, 0, 1)^T \rangle = w_3.$$

Nach (b) gilt

$$0 = \langle (1, -3, 0), (w_1, w_2, w_3) \rangle = w_1 - 3w_2.$$

Das heißt $w_1 = 3w_2$. Wir erhalten $w = (3w_2, w_2, 1)$. Nach (c) gilt außerdem

$$\sqrt{11} = |w| = \sqrt{(3w_2)^2 + (w_2)^2 + 1^2}.$$

Es folgt $11 = 10(w_2)^2 + 1$ und damit $10 = 10(w_2)^2$. Das heißt $w_2 \in \{-1, 1\}$. Mit (d) folgt nun $w_2 = 1$ und $w_1 = 3w_2 = 3$. Insgesamt folgt $w = (3, 1, 1)$.