Mathematik für die Geowissenschaften I **Klausur vom 19.02.2024**

Hinweise

- Diese Klausur besteht aus 7 Aufgaben in denen jeweils 10 Punkte erreicht werden können. Die mögliche Gesamtpunktzahl beträgt also 70 Punkte.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben bitte direkt unter der Aufgabenstellung. Sollte der Platz nicht ausreichen, fahren Sie auf der entsprechenden Rückseite fort und kennzeichnen Sie dies entsprechend auf der Vorderseite.
- Begründen Sie Ihre Aussagen und vereinfachen Sie Ergebnisse stets so weit wie möglich.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Neben Schreibzeug, Ausweis/Studierendenausweis und Verpflegung dürfen keine weiteren Gegenstände mit an den zugewiesenen Arbeitsplatz genommen werden.
- Sie dürfen innerhalb einer Aufgabe einen vorangegangenen Aufgabenteil auch dann verwenden, wenn Sie diesen Teil nicht bearbeitet haben.

Viel Erfolg!

Mathematik für die Geowissenschaften I **Klausur vom 19.02.2024**

Aufgabe 1. (10 Punkte) Diese Aufgabe besteht aus 10 Aussagen. Entscheiden Sie jeweils, ob die Aussage wahr oder falsch ist und setzen Sie bei jeder Aussage genau ein Kreuz.

Richtig gesetzte Kreuze geben 1 Punkt und falsch gesetzte Kreuze geben keinen Punkt. Wenn Sie ein gesetztes Kreuz korrigieren wollen, füllen Sie die Box mit dem falsch gesetzten Kreuz aus und markieren Sie die andere Box mit einem Kreuz.

Es gilt $(\{1\} \cap \{2\}) \cup \{3\} = \{1\} \cap (\{2\} \cup \{3\})$. ☐ wahr ☐ falsch

Jede bijektive Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist injektiv. ☐ wahr ☐ falsch

Jede surjektive Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist bijektiv. ☐ wahr ☐ falsch

Für jede Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ☐ wahr ☐ falsch

Die Betragsfunktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto |x|$ ist stetig. ☐ wahr ☐ falsch

Die Betragsfunktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto |x|$ ist differenzierbar. ☐ wahr ☐ falsch

Es gilt $\ln(1 + 2 + 5) = \ln(2) + \ln(4)$. ☐ wahr ☐ falsch

Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind orthogonal. ☐ wahr ☐ falsch

Für jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ mit $A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gilt bereits $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. ☐ wahr ☐ falsch

Für alle Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ gilt $A \cdot B = B \cdot A$. ☐ wahr ☐ falsch

Aufgabe 2. (3+3+2+2 Punkte) Gegeben seien die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}; (a,b) \mapsto a^2 + b^2$$

und

$$g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2; x \mapsto (\cos(x), \sin(x)).$$

(1) Berechnen Sie $(g \circ f)(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$ und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.
(2) Berechnen Sie $(f \circ g)(\sqrt{2})$ und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.
(3) Zeigen Sie, dass f nicht surjektiv ist.
(4) Zeigen Sie, dass f nicht injektiv ist.

Lösung:

(1) Es gilt

$$(g \circ f)(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}) = g(f(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})) = g(\pi + \pi) = g(2\pi) = (\cos(2\pi), \sin(2\pi)) = (1, 0).$$

(2) Es gilt

$$(f \circ g)(\sqrt{2}) = f(g(\sqrt{2})) = f(\cos(\sqrt{2}), \sin(\sqrt{2})) = \cos(\sqrt{2})^2 + \sin(\sqrt{2})^2 = 1.$$

Die letzte Gleichung gilt nach dem Satz von Pythagoras für $\sin$ und $\cos$.

(3) Es gilt $f(a,b) = a^2 + b^2 \geq 0$ für alle $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Insbesondere existiert kein Element $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ mit $f(a,b) = -1$.

(4) Es gilt $f(0,1) = 0^1 + 1^2 = 1 = 1^2 + 0^2 = f(1,0)$ und $(0,1) \neq (1,0)$.

Aufgabe 3. (3+3+4 Punkte)

(1) Berechnen Sie den Grenzwert der konvergenten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \frac{2n^3 - 5n^2}{4n^3 + 2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

(2) Berechnen Sie den Grenzwert der konvergenten Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$b_n := \frac{5^n - 9^n}{5^{n+1} - 3^{2n+2}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

(3) Begründen Sie, warum der Grenzwert $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ existiert und berechnen Sie anschließend den genauen Wert.

Lösung:

(1) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $a_n = \frac{2n^3-5n^2}{4n^3+2} = \frac{n^3}{n^3}\frac{2-5\frac{1}{n}}{4+\frac{2}{n^3}} = \frac{2-5\frac{1}{n}}{4+\frac{2}{n^3}}$. Wir erhalten

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - 5\frac{1}{n}}{4 + \frac{2}{n^3}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 - \lim\limits_{n\to\infty} 5\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 4 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n^3}} = \frac{2-0}{4+0} = \frac{1}{2}.$$

(2) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$b_n = \frac{5^n - 9^n}{5^{n+1} - 3^{2n+2}} = \frac{5^n - 9^n}{5^{n+1} - 3^{2(n+1)}} = \frac{5^n - 9^n}{5^{n+1} - 9^{n+1}} = \frac{9^{n+1}}{9^{n+1}}\frac{\frac{1}{9}(\frac{5}{9})^n - \frac{1}{9}}{(\frac{5}{9})^{n+1} - 1} = \frac{1}{9}\frac{(\frac{5}{9})^n - 1}{(\frac{5}{9})^{n+1} - 1}.$$

Wir erhalten

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{9}\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{5}{9})^n - \lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{5}{9})^{n+1} - \lim\limits_{n\to\infty} 1} = \frac{1}{9}\frac{0-1}{0-1} = \frac{1}{9}.$$

(3) Da $\frac{1}{3^n} = (\frac{1}{3})^n$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt und $0 < |\frac{1}{3}| < 1$ gilt, existiert nach Vorlesung der Grenzwert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3})^n = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$. Damit gilt

$$\begin{aligned}\sum_{n=5}^{\infty}(\frac{1}{3})^n &= \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3})^n - \sum_{n=1}^{4}(\frac{1}{3})^n = \frac{1}{2} - (\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}) \\ &= \frac{1}{2} - (\frac{27}{81} + \frac{9}{81} + \frac{3}{81} + \frac{1}{81}) = \frac{1}{2} - \frac{40}{81} = \frac{81}{162} - \frac{80}{162} = \frac{1}{162}.\end{aligned}$$

Alternativ gilt mit derselben Begründung $\sum_{n=5}^{\infty}(\frac{1}{3})^n = \frac{(\frac{1}{3})^5}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3^5}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2\cdot 3^4} = \frac{1}{162}$.

Aufgabe 4. (3+7 Punkte)

Während der Schneeschmelze in den Bergen nimmt das Wasser in einem ausgetrockneten See stetig zu. Die Wassermenge im See wird durch die Funktion

$$f\colon [0,5] \longrightarrow \mathbb{R}; t \mapsto 2 \cdot e^{3t} + 3$$

beschrieben. Hierbei ist $f(t)$ die Wassermenge (in Litern) zum Zeitpunkt t (in Stunden) im See. Zum Beispiel befinden sich nach genau einer Stunde $2 \cdot e^3 + 3$ Liter im See.

(1) Berechnen Sie die Wassermenge im See zum Zeitpunkt $t = \frac{\ln(25)}{2}$ und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.
(2) Wie viel Wasser befindet sich im Verlauf der 5 Stunden durchschnittlich im See? Hier ist also ein Mittelwert gesucht.

Hinweis: Durch Rechnung ergibt sich in (2) ein Ergebnis der Form $ae^b + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{Q}$, das sich nicht weiter vereinfachen lässt.

Lösung:

(1) Es gilt $\ln(25) = \ln(5^2) = 2\ln(5)$ und damit

$$f(\frac{\ln(25)}{2}) = f(\ln(5)) = 2 \cdot e^{3\ln(5)} + 3 = 2 \cdot (e^{\ln(5)})^3 + 3 = 2 \cdot 5^3 + 3 = 2 \cdot 125 + 3 = 253.$$

Damit sind zum Zeitpunkt $t = \frac{\ln(25)}{2}$ genau 253 Liter im See.

(2) Gesucht ist der Mittelwert

$$\frac{1}{5-0} \int_0^5 f(t)dt.$$

Eine Stammfunktion von f ist durch $F(t) = \frac{2}{3}e^{3t} + 3t$ gegeben, da nach der Kettenregel $F'(t) = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot e^{3t} + 3 = f(t)$ gilt. Wir erhalten

$$\frac{1}{5-0} \int_0^5 f(t)dt = \frac{1}{5}(\frac{2}{3}e^{3t} + 3t)\Big|_0^5 = \frac{1}{5}(\frac{2}{3}e^{15} + 15 - \frac{2}{3}e^0) = \frac{2}{15}(e^{15} - 1) + 3 = \frac{2}{15}e^{15} + \frac{43}{15}.$$

Aufgabe 5. (6+4 Punkte)

(1) Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}; f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

(2) Bei welchen kritischen Punkten aus (1) handelt es sich um ein lokales Minimum bzw. lokales Maximum?

Lösung:

(1) Wir berechnen die partiellen Ableitungen. Es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y \text{ und } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3x.$$

Die kritischen Punkte erfüllen $3x^2 - 3y = 0$ und $3y^2 - 3x = 0$. Die erste Gleichung liefert $y = x^2$ und die zweite Gleichung liefert $x = y^2$. Es folgt $x = x^4$. Das heißt $x(x^3 - 1) = 0$ und damit $x = 0$ oder $x^3 = 1$ und damit $x = 1$. Der Fall $x = 0$ liefert $y = 0^2 = 0$ und der Fall $x = 1$ liefert $y = 1^2 = 1$. Das heißt die kritischen Punkte sind $(0,0)$ und $(1,1)$.

(2) Wir berechnen die zweiten partiellen Ableitungen und erhalten

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) = 6x, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) = 6y \text{ und } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -3 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y).$$

Das heißt

$$D(f)(x,y) = (6x)(6y) - (-3)^2 = 36xy - 9.$$

Es gilt also $D(f)(0,0) = -9 < 0$ und $D(f)(1,1) = 36 - 9 = 27 > 0$. Nach Satz 2.50 der Vorlesung ist damit $(0,0)$ keine Extremstelle und $(1,1)$ ist ein lokales Minimum, da $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(1,1) = 6 > 0$.

Aufgabe 6. (6+4 Punkte)

(1) Es sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 6 & 7 & 9 & 9 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{R})$.
   (a) Bringen Sie A durch elementare Zeilenumformungen in Zeilenstufenform.
   (b) Die in (a) erhaltene Matrix in Zeilenstufenform sei mit B bezeichnet. Bestimmen Sie den Rang r_B von B und die zugehörigen Elemente $s(1), \ldots, s(r_B)$.

(2) Es sei $v := (3, 6, 6)^T \in \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie einen Vektor $w \in \mathbb{R}^3$, der gleichzeitig alle drei folgenden Eigenschaften besitzt.
   (a) Die Länge von w ist 1.
   (b) Es existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \cdot v = w$.
   (c) $\langle (0, 0, 1)^T, w\rangle < 0$.

Lösung:

(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 6 & 7 & 9 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} Z_2 - 5\cdot Z_1 \\ Z_3 - 2\cdot Z_1 \\ Z_4 - 6\cdot Z_1 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -9 & -15 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ Z_3 \leftrightarrow Z_4 \\ \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -5 & -9 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ Z_2 \cdot \frac{1}{-4} \\ \\ \\ \end{matrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -9 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ Z_3 - (-5)\cdot Z_2 \\ \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: B.$$

Diese Matrix B ist in Zeilenstufenform. Weiter gilt damit $r_B = 3$, da 3 die Anzahl der Nicht-Nullzeilen ist. Weiter gilt $s(1) = 1, s(2) = 2$ und $s(3) = 3$. Die dies gerade die Spalten sind, die die ersten Nichtnulleinträge (von links) enthalten.

(2) Es sei w ein Vektor der (a)-(c) erfüllt. Nach (b) existiert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$w = \lambda \cdot (3, 6, 6)^T = (3\lambda, 6\lambda, 6\lambda)^T.$$

Wir erhalten mit (a)

$$1 = |w| = \sqrt{\langle (3\lambda, 6\lambda, 6\lambda)^T, (3\lambda, 6\lambda, 6\lambda)^T\rangle} = \sqrt{9\lambda^2 + 36\lambda^2 + 36\lambda^2} = \sqrt{81\lambda^2} = 9|\lambda|.$$

Das heißt $\lambda \in \{\pm\frac{1}{9}\}$. Mit (c) gilt weiter

$$0 > \langle (0, 0, 1)^T, w\rangle = \langle (0, 0, 1)^T, (3\lambda, 6\lambda, 6\lambda)^T\rangle = 6\lambda.$$

Das heißt $\lambda < 0$. Es kommt also nur $\lambda = -\frac{1}{9}$ in Frage und damit $w = \frac{-1}{9}(3, 6, 6)^T = (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})^T$. Die Probe zeigt, dass w die Eigenschaften (a)-(c) erfüllt.

Aufgabe 7. (5+5 Punkte)

(1) Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ sei eine Polynomfunktion mit folgenden Eigenschaften:
   (a) $g'(0) = 0$,
   (b) $(0, 7) \in G_g$, wobei G_g den Graph von g bezeichnet,
   (c) $g(1) = -g(-1)$.
   Bestimmen Sie b, c, d und berechnen Sie anschließend $g(2) - 8a$.

(2) Es seien $r, k \in \mathbb{R}_{>0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ positive reelle Zahlen fest gewählt. Die sogenannte *logistische Funktion von Ricker* ist durch

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ x \mapsto x\, e^{r(1-\frac{x}{k})}$$

definiert. Berechnen Sie $f(4)e^{-8}$ unter der Annahme $f(20) = 20$ und $f'(2) = 0$.

Lösung:

(1) Es gilt $g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ und (a) liefert $0 = g'(0) = c$. Weiter gilt nach (b) schon $7 = g(0) = d$. Mit (c) gilt

$$\begin{aligned} a + b + c + d = g(1) = -g(-1) &= -(a(-1)^3 + b(-1)^2 + (-1)c + d) \\ &= -(-a + b - c + d) = a - b + c - d. \end{aligned}$$

Wir erhalten $2b = -2d = -14$ und damit $b = -7$. Insgesamt ist g also durch $g(x) = ax^3 - 7x^2 + 7$ gegeben. Es folgt $g(2) - 8a = 2^3a - 7 \cdot 2^2 + 7 - 8a = -21$.

(2) Es gilt

$$20 = f(20) = 20e^{r(1-\frac{20}{k})}$$

und wir erhalten $1 = e^{r(1-\frac{20}{k})}$. Das heißt $0 = \ln(1) = \ln(e^{r(1-\frac{20}{k})}) = r(1 - \frac{20}{k})$. Mit $r \neq 0$ folgt $1 = \frac{20}{k}$ und damit $k = 20$. Nach der Produktregel gilt

$$f'(x) = x'e^{r(1-\frac{x}{k})} + x(e^{r(1-\frac{x}{k})})' = e^{r(1-\frac{x}{k})} + x(-\frac{r}{k})(e^{r(1-\frac{x}{k})}) = (1 - \frac{xr}{k})(e^{r(1-\frac{x}{k})}).$$

Mit $k = 20$ folgt

$$0 = f'(2) = (1 - \frac{2r}{20})e^{r(1-\frac{2}{20})}.$$

Da $e^{r(1-\frac{2}{20})} \neq 0$ gilt, folgt $0 = 1 - \frac{2r}{20}$. Das heißt $r = 10$. Wir berechnen

$$f(4)e^{-8} = 4e^{10(1-\frac{4}{20})}e^{-8} = 4 \cdot e^8 \cdot e^{-8} = 4.$$