Daniel Bissinger **Algebra I LAG, WS 24/25**

Übungsserie 

Aufgabe 49. (1+1+1+1 Punkte) Es sei $\alpha := \sqrt{2}+\sqrt{5} \in \mathbb{R}$.

(1) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ gilt.
(2) Zeigen Sie, dass $\{1, \sqrt{2}\}$ eine $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ist.
(3) Beweisen Sie, dass $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ gilt.
(4) Zeigen Sie, dass α algebraisch über $\mathbb{Q}$ ist und bestimmen das Minimalpolynom $\mu_\alpha \in \mathbb{Q}[X]$ von α über $\mathbb{Q}$.

Hinweis: Sie dürfen in (3) ohne Beweis $\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ verwenden.

Aufgabe 50. (2+2 Punkte) Es sei $L : K$ eine Galoiserweiterung mit $G := \mathrm{Aut}(L : K)$.

(1) Es sei U eine Untergruppe von G. Zeigen Sie die Existenz eines Zwischenkörper $K \subseteq Q \subseteq L$ mit $[L : Q] = |U|$.
(2) Es sei G abelsch von Ordnung 12. Zeigen Sie, dass ein Zwischenkörper $K \subseteq Q \subseteq L$ mit $[Q : K] = 2$ existiert.

Aufgabe 51. (1+1+2 Bonuspunkte) Es sei K ein endlicher Körper.

(1) Zeigen Sie, dass eine Primzahl $p \in \mathbb{P}$ mit $P(K) \cong \mathbb{Z}/(p)$ existiert.
(2) Zeigen Sie, dass eine Primzahl $p \in \mathbb{P}$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|K| = p^n$ existieren.
(3) Zeigen Sie, dass in $K[X] \setminus K$ ein Polynom existiert, das keine Nullstelle besitzt.

Hinweis zu (3): Sie können sich beim Beweis der Aussage an dem Beweis des Satzes von Euklid orientieren.

Aufgabe 52. (1+1+2 Bonuspunkte) Es sei $K = \mathbb{Z}/(2)$. Für $z \in \mathbb{Z}$ verwenden wir in dieser Aufgabe die Notation $\overline{z} = z + (2)$.

(1) Zeigen Sie, dass $g := X^2 + X + \overline{1} \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom ist.
(2) Schreiben Sie $f := X^6 + \overline{1}$ als Produkt von irreduziblen Faktoren in $K[X]$.
(3) Es sei $L : K$ eine Körpererweiterung und $a \in L$ eine Nullstelle von g in L. Zeigen Sie, dass die Menge $Z := \{\overline{0}, \overline{1}, a, a + \overline{1}\}$ einen Zwischenkörper $K \subseteq Z \subseteq L$ bildet und ein Zerfällungskörper von f ist.

Abgabetermin: Bis 31.01.25 um 12:00 Uhr im OLAT.