Daniel Bissinger **Algebra I LAG, WS 24/25**

Übungsserie 11

Aufgabe 45. (4 Punkte) Sei $L : K$ eine endliche Körpererweiterung derart, dass $[L : K]$ eine Primzahl ist. Zeigen Sie, dass $L = K(a)$ für alle $a \in L \setminus K$ gilt.

Aufgabe 46. (4 Punkte) Zeigen Sie: Ist K ein Körper mit $\mathbb{R} \subseteq K \subseteq \mathbb{C}$, so gilt $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$.

Aufgabe 47. (2+2 Punkte)

(1) Bestimmen Sie den Grad der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2}) : \mathbb{Q}$.
(2) Es sei $h := X^8 - X^6 + X^5 - X^3 + X^2 - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von h mit $\alpha \notin \{-1, 1\}$. Bestimmen Sie den Grad der Körperweiterung $\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}$.

Aufgabe 48. (1+2+1 Punkte) Es sei $q = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N}$.

(1) Zeigen Sie, dass $e^{q\pi i}$ algebraisch über $\mathbb{Q}$ ist.
(2) Zeigen Sie, dass $\cos(q\pi)$ algebraisch über $\mathbb{Q}$ ist.
(3) Zeigen Sie, dass $\sin(q\pi)$ algebraisch über $\mathbb{Q}$ ist.

Hinweis: Es gilt $e^{xi} = \cos(x) + i\sin(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, sowie $\sin(-x) = -\sin(x)$ und $\cos(-x) = \cos(x)$.

Abgabetermin: Bis 24.01.25 um 12:00 Uhr im OLAT.