Daniel Bissinger **Algebra I LAG, WS 24/25**

Übungsserie 10

Aufgabe 41. (3+1 Punkte)

(1) Es sei K ein Körper und $f \in K[X]$ ein Polynom von Grad $2 \leq \deg(f) \leq 3$. Zeigen Sie, dass f genau dann irreduzibel ist, wenn f keine Nullstelle besitzt.
(2) Geben Sie ein Beispiel, das zeigt, dass die Aussage für Polynome von Grad 4 nicht mehr richtig ist.

Aufgabe 42. (2+2 Punkte) Untersuchen Sie folgende Polynome auf Irreduzibilität.

(1) $f = 6X^0$ in $\mathbb{Z}[X]$ und $\mathbb{Q}[X]$.
(2) $g = X^2 + 2$ in $\mathbb{R}[X]$ und $\mathbb{C}[X]$.

Aufgabe 43. (2+2 Punkte)

(1) Es seien R, S Integritätsbereiche, $\varphi\colon R \longrightarrow S$ ein Isomorphismus von Ringen und $\alpha \in R$ ein Element. Zeigen Sie, dass α genau dann irreduzibel in R ist, wenn $\varphi(\alpha)$ irreduzibel in S ist.
(2) Es sei $R \neq \{0\}$ ein kommutativer Ring und $a \in R$. Zeigen Sie, dass der Homomorphismus von Ringen $\varphi\colon R[X] \longrightarrow R[X]$, der nach Satz 4.1.1 eindeutig durch $\varphi(X) = X + a$ und $\varphi(r) = r$ für alle $r \in R$ bestimmt ist, ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 44. (2+2 Punkte) Untersuchen Sie folgende Polynome auf Irreduzibilität.

(1) $f = 30X^5 + 20X^3 + 20$ in $\mathbb{Z}[X]$ und $\mathbb{Q}[X]$.
(2) $g = X^6 + X^3 + 1$ in $\mathbb{Z}[X]$ und $\mathbb{Q}[X]$.

Hinweis zu (2): Verwenden Sie Aufgabe 43(2) mit einer geeigneten Zahl $a \in \{1, 2, 3\}$.

Abgabetermin: Bis 17.01.25 um 12:00 Uhr im OLAT.