Daniel Bissinger **Algebra I LAG, WS 24/25**

Übungsserie 

Aufgabe 36. (2+2 Punkte) Es seien R ein Integritätsbereich und $a, b \in R$ und a eine Einheit.

(1) Zeigen Sie, dass $a \mid b$ gilt und b genau dann eine Einheit ist, wenn $b \mid a$ gilt.
(2) Zeigen Sie, dass b genau dann ein Primelement ist, wenn ab ein Primelement ist.

Aufgabe 37. (2+2 Punkte) Wir betrachten

$$\mathbb{Z}[i] := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C},$$

den Ring der Gaußschen Zahlen zusammen mit der Abbildung

$$\mathcal{N} \colon \mathbb{Z}[i] \longrightarrow \mathbb{N}_0, a + bi \mapsto |a + bi|^2 = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass $\mathbb{Z}[i]$ ein euklidischer Ring mit Gradfunktion $\rho \colon \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}_0 \; ; \; z \mapsto \mathcal{N}(z)$ ist.

(1) Es sei $z = x + yi \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie, dass ein Element $w \in \mathbb{Z}[i]$ mit $\mathcal{N}(z - w) < 1$ existiert.
(2) Es seien $a + bi, c + di \in \mathbb{Z}[i]$ mit $c + di \neq 0$. Zeigen Sie unter Verwendung von (1), dass $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ mit $a + bi = q(c + di) + r$ und $r = 0$ oder $\mathcal{N}(r) < \mathcal{N}(c + di)$ existieren.

Hinweis zu (2): Es gilt $\mathcal{N}(\beta\gamma) = \mathcal{N}(\beta)\mathcal{N}(\gamma)$ für alle $\beta, \gamma \in \mathbb{Z}[i]$.

Aufgabe 38. (2+2 Punkte)

(1) Es sei $\alpha = a + bi \in \mathbb{Z}[i]$. Zeigen Sie, dass α genau dann eine Einheit in $\mathbb{Z}[i]$ ist, wenn $\mathcal{N}(\alpha) = 1$ gilt.
(2) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[i]^\times = \{\pm 1, \pm i\}$ gilt.

Aufgabe 39. (1+1+1+1 Punkte) Wir betrachten erneut den Ring $\mathbb{Z}[i]$.

(1) Sei $p \in \mathbb{P}$ eine Primzahl und $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ mit $\mathcal{N}(\alpha) = p$. Zeigen Sie, dass α irreduzibel in $\mathbb{Z}[i]$ ist.
(2) Gilt die Umkehrung von (1)? Untersuchen Sie die Aussage für kleine Primzahlen.
(3) Zeigen Sie, dass 2 in $\mathbb{Z}[i]$ nicht irreduzibel ist, und schreiben Sie 2 als Produkt von irreduziblen Elementen.
(4) Schreiben Sie $\alpha = 20 - 10i \in \mathbb{Z}[i]$ als Produkt von irreduziblen Elementen in $\mathbb{Z}[i]$.

Aufgabe 40. (2+2 Bonuspunkte) Es sei $R \neq \{0\}$ ein kommutativer Ring, sowie

$$X := \{I \subsetneq R \mid I \text{ ist Ideal von } R\}$$

die Menge der echten Ideale von R.

(1) Es sei $Y \subseteq X$ mit $Y \neq \varnothing$ eine total geordnete Teilmenge bezüglich $\subseteq$, das heißt für je zwei Elemente $I, J \in Y$ gilt $I \subseteq J$ oder $J \subseteq I$. Zeigen Sie: $\bigcup_{I \in Y} I \in X$.
(2) Beweisen Sie unter Verwendung des Lemmas von Zorn, dass R ein maximales Ideal besitzt.

Abgabetermin: Bis 10.01.25 um 12:00 Uhr im OLAT.
Frohe Feiertage und einen guten Rutsch ins neue Jahr wünscht das Algebra Team.