Daniel Bissinger **Algebra I LAG, WS 24/25**

Übungsserie 7

Aufgabe 27. (1+1+1+1 Punkte) Es sei R ein Ring.

(1) Beweisen Sie, dass $0 \cdot r = 0 = r \cdot 0$ für alle $r \in R$ gilt.
(2) Beweisen Sie $(-1) \cdot r = -r = r \cdot (-1)$ für alle $r \in R$.
(3) Beweisen Sie, dass $(-1) \cdot (-1) = 1$ gilt.
(4) Es sei $\varphi \colon R \longrightarrow S$ ein Homomorphismus von Ringen. Zeigen Sie, dass $\ker \varphi$ ein Ideal von R ist.

Aufgabe 28. (3+1 Punkte) Sei $\mathrm{Abb}(\mathbb{Z})$ die Menge der Abbildungen von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

(1) $\mathrm{Abb}(\mathbb{Z})$ ist bezüglich der punktweisen Addition $+$ von Abbildungen
$$(f+g)(x) := f(x)+g(x) \quad \text{für alle } f, g \in \mathrm{Abb}(\mathbb{Z}), x \in \mathbb{Z}$$
eine abelsche Gruppe.
(2) $\mathrm{Abb}(\mathbb{Z})$ ist bezüglich $+$ und der Komposition $\circ$ von Abbildungen kein Ring.

Aufgabe 29. (4 Punkte) Es $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $a \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(1) $a + (n)$ ist eine Einheit in $\mathbb{Z}/(n)$.
(2) Es gilt $\mathrm{ggT}(a, n) = 1$.

Hinweis: Verwenden Sie das Lemma von Bézout.

Aufgabe 30. (4 Punkte) Es sei $p \in \mathbb{P}$ eine Primzahl und $a \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass p ein Teiler von $a^p - a$ ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Einheitengruppe von $\mathbb{Z}/(p)$.

Aufgabe 31. (2 Bonuspunkte) Beweisen oder widerlegen Sie: In der Definition eines Ringes R kann die Forderung „$(R, +)$ ist abelsche Gruppe“ durch „$(R, +)$ ist Gruppe“ ersetzt werden.

Abgabetermin: Bis 13.12.24 um 12:00 Uhr im OLAT.