Daniel Bissinger **Algebra I LAG, WS 24/25**

Übungsserie 

Aufgabe 23. (4 Punkte) Es seien G eine Gruppe der Ordnung 125 und X eine G-Menge mit $|X| = 24$ und $|X/G| = 8$. Bestimmen Sie die Anzahl der Fixpunkte der Operation.

Aufgabe 24. (4 Punkte) Es sei G eine Gruppe der Ordnung 343, die nicht abelsch ist. Zeigen Sie, dass $Z(G)$ eine zyklische Gruppe der Ordnung 7 ist.
Hinweis: Orientieren Sie sich beim Beweis an Korollar 2.1.1.

Aufgabe 25. (2+2 Punkte)

(1) Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle abelschen Gruppen der Ordnung 8575.
(2) Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle abelschen Gruppen der Ordnung 686, die ein Element der Ordnung 49 enthalten.

Aufgabe 26. (1+3 Punkte)

(1) Es sei G eine endliche Gruppe und $p \in \mathbb{P}$ eine Primzahl mit $p \mid |G|$. Zeigen Sie, dass in G mindestens $p - 1$ Elemente der Ordnung p existieren.[1]
(2) Bestimmen Sie die Sylow p-Untergruppen von $\mathcal{S}_3$ und $\mathbb{Z}/\langle 60\rangle$ für jede Primzahl $p \in \mathbb{P}$ mit $p \mid |\mathcal{S}_3|$ bzw. $p \mid |\mathbb{Z}/\langle 60\rangle|$ und listen Sie die Sylowgruppen mit allen Elementen.

Abgabetermin: Bis 06.12.24 um 12:00 Uhr im OLAT.

[1] Der Satz ist auch als Satz von Cauchy bekannt.