Daniel Bissinger **Algebra I LAG, WS 24/25**

Übungsserie 5

Aufgabe 19. (2+1+1 Punkte) Sei $2 \leq \ell \leq n \in \mathbb{N}$.

(1) Zeigen Sie, dass jeder ℓ-Zykel $\sigma \in \mathcal{S}_n$ von Ordnung ℓ ist.
(2) Es sei $(a_1, \ldots, a_\ell)$ ein ℓ-Zykel. Zeigen Sie, dass $(a_1, \ldots, a_\ell)^{-1} = (a_\ell, \ldots, a_1)$ gilt.
(3) Kann für $n \geq 4$ das Element ℓ so gewählt werden, dass $\mathcal{S}_n$ ein Element der Ordnung ℓ enthält, das kein ℓ-Zykel ist?

Aufgabe 20. (1+2+1 Punkte) Betrachten Sie die folgenden Permutationen von $\mathcal{S}_7$:

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \sigma_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Bestimmen Sie die Zykeldarstellungen von σ_1 und σ_2.
(2) Berechnen Sie $\sigma_1^2, \sigma_2^{105}, \sigma_1\sigma_2$ und $\sigma_2\sigma_1$.
(3) Berechnen Sie $\operatorname{sgn}(\sigma_1)$ und $\operatorname{sgn}(\sigma_2)$.

Aufgabe 21. (2+2 Punkte) Es sei $\sigma := (2,3)(4,6,5,1,2)(1,3,2,5,6) \in S_{12}$.

(1) Geben Sie ein Element $\tau \in \mathcal{S}_{12}$ mit $\tau\sigma\tau^{-1} = (2,5)(3,4,1)$ an.
(2) Begründen Sie, ob ein Element $\tau \in \mathcal{S}_{12}$ existiert mit
   (i) $\tau\sigma(12,10,11,7)(5,8)\tau^{-1} = (1,2,3,4)(5,6)(7,8,9)(10,12)$, bzw.
   (ii) $\tau\sigma\tau^{-1} = (1,2)(3,4,5,6)$.
   Wenn τ existiert, geben Sie ein entsprechendes Element an.

Hinweis: In einer Gruppe G gilt für alle $x, y, g \in G$ die Gleichung $gxyg^{-1} = gxg^{-1}gyg^{-1}$.

Aufgabe 22. (1+2+1 Punkte) Es sei G die Gruppe $G := (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot_{\mathbb{R}})$.

(1) Zeigen Sie, dass G auf der Menge $X := \mathbb{R}^2$ durch

$$G \times X \longrightarrow X; (g, (x, y)) \mapsto g.(x, y) := (g \cdot_{\mathbb{R}} x, g^{-1} \cdot_{\mathbb{R}} y)$$

operiert.

(2) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Zeigen Sie, dass die Bahn $G.(a, b)$ durch den Graph der Funktion

$$h \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \mapsto \frac{ab}{t}$$

beschrieben wird.

(3) Skizzieren Sie die Bahnen von $(0, 0), (0, \pi), (1, 1)$ und $(1, -2)$.

Abgabetermin: Bis 29.11.24 um 12:00 Uhr im OLAT.