Daniel Bissinger **Algebra I LAG, WS 24/25**

Übungsserie 4

Aufgabe 15. (4 Punkte) Zeigen Sie, dass die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ das semidirekte Produkt der speziellen linearen Gruppe $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ und

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$$

ist.

Aufgabe 16. (2+2 Punkte) Es sei $G = \langle x \rangle$ eine zyklische Gruppe der Ordnung $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Weiter seien $1 < d_1, \ldots, d_\ell < n$ Teiler von n. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(1) Es existieren Normalteiler $N_1, N_2, \ldots, N_\ell \trianglelefteq G$ von G, die zyklisch sind und $|N_i| = d_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ erfüllen.
(2) Gilt darüber hinaus $\mathrm{ggT}(d_i, d_j) = 1$ für alle $i \neq j \in \{1, \ldots, n\}$ und $d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_\ell = n$, so gilt
$$G \cong \mathbb{Z}/\langle d_1 \rangle \times \mathbb{Z}/\langle d_2 \rangle \times \cdots \times \mathbb{Z}/\langle d_\ell \rangle.$$

Aufgabe 17. (1+1+2 Punkte) Es seien G, H Gruppen.

(1) Zeigen Sie, dass $Z(G \times H) = Z(G) \times Z(H)$ gilt.
(2) Berechnen Sie $Z(\mathcal{S}_3)$.
(3) Entscheiden Sie jeweils, ob die Gruppen $\mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_2$ und $\mathcal{C}_4 \times \mathcal{C}_2$, $\mathbb{Z}/\langle 7 \rangle \times \mathbb{Z}/\langle 9 \rangle$ abelsch bzw. zyklisch sind.

Aufgabe 18. (2+2 Punkte) Es seien G eine Gruppe und $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler mit der Eigenschaft, dass für jede Untergruppe U von G mit $N \subseteq U \subseteq G$ schon $U \in \{N, G\}$ gilt.

(1) Es sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe mit $H \nsubseteq N$. Zeigen Sie, dass $NH = G$ gilt.
(2) Es seien $H_1 \neq \{e\} \neq H_2$ Untergruppen von G mit $N \cap H_1 = \{e\} = N \cap H_2$. Zeigen Sie, dass H_1 und H_2 isomorphe Gruppen sind.

Abgabetermin: Bis 22.11.24 um 12:00 Uhr im OLAT.