Daniel Bissinger **Algebra I LAG, WS 24/25**

Übungsserie 3

Aufgabe 10. (1+1+2 Punkte) Es sei $\varphi\colon G \longrightarrow G'$ ein Gruppenhomomorphismus.

(1) Es sei $N' \trianglelefteq G'$ ein Normalteiler. Zeigen Sie, dass $\varphi^{-1}(N')$ ein Normalteiler von G ist.
(2) Es sei $(N_i)_{i\in I}$ eine Familie von Normalteilern von G. Zeigen Sie, dass $\bigcap_{i\in I} N_i$ ein Normalteiler von G ist.
(3) Zeigen Sie, dass für Untergruppen $U, V \subseteq G$ von G die Vereinigung $U \cup V$ genau dann eine Untergruppe von G ist, wenn $U \subseteq V$ oder $V \subseteq U$ gilt.

Aufgabe 11. (3+1 Punkte) Es sei G eine Gruppe.

(1) Zeigen Sie, dass $Z(G) := \{g \in G \mid \forall h \in G\colon gh = hg\}$ ein Normalteiler von G ist.
(2) Zeigen Sie, dass jede Untergruppe von $Z(G)$ ein Normalteiler von G ist.

Bemerkung: Machen Sie sich auch klar, dass $Z(G) = G$ genau dann gilt, wenn G eine abelsche Gruppe ist.

Aufgabe 12. (2+2 Punkte)

(1) Es sei $\varphi\colon (\mathbb{Q}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +)$ ein Homomorphismus und $x \in \mathbb{Q}$. Weiter sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass ein $u \in \mathbb{Z}$ mit $\varphi(x) = n \cdot u$ existiert.
(2) Bestimmen Sie alle Homomorphismen $\varphi\colon (\mathbb{Q}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +)$.

Hinweis zu (1): Es gilt $x = 1 \cdot x$.

Aufgabe 13. (2+2 Punkte)

(1) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Begründen Sie, dass $\langle n\rangle \subseteq (\mathbb{Z}, +)$ ein Normalteiler ist und die Faktorgruppe $\mathbb{Z}/\langle n\rangle$ zyklisch von Ordnung n ist.
(2) Es sei $G = \langle x\rangle$ eine zyklische Gruppe. Zeigen Sie die Existenz einer eindeutig bestimmten Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ mit $G \cong \mathbb{Z}/\langle n\rangle$.

Hinweis zu (2): Verwenden Sie eine Folgerung aus dem Homomorphiesatz.

Aufgabe 14. (2 Bonuspunkte) Es sei G eine Gruppe sodass $G/Z(G)$ eine zyklische Gruppe ist. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

Abgabetermin: Bis 15.11.24 um 12:00 Uhr im OLAT.