Daniel Bissinger **Algebra I LAG, WS 24/25**

Übungsserie



Aufgabe 6. (1+1+1+1 Punkte) Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \neq 0$ oder $b \neq 0$. Das Element

$$\mathrm{kgV}(a,b) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid \text{Es gilt } a \mid n \text{ und } b \mid n\} \leq ab$$

heißt **kleinstes gemeinsames Vielfaches** von a und b.

(1) Es sei $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.
   (i) Es ist $k = \mathrm{kgV}(a,b)$.
   (ii) Es gilt $a \mid k$ und $b \mid k$, und für jedes gemeinsame Vielfache $\ell \in \mathbb{N}$ von a und b gilt $k \mid \ell$.

(2) Zeigen Sie $\mathrm{kgV}(ca, cb) = c\,\mathrm{kgV}(a,b)$ für alle $c \in \mathbb{N}$.

(3) Es seien $u, v \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(u,v) = 1$. Zeigen Sie $\mathrm{kgV}(u,v) = uv$.

(4) Zeigen Sie $\mathrm{ggT}(a,b) \cdot \mathrm{kgV}(a,b) = ab$.

Aufgabe 7. (2+1+1 Punkte)

(1) Zeigen Sie, dass $G := \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ mit der Verknüpfung

$$a \circ b := a + b + ab$$

eine Gruppe ist.

(2) Bestimmen Sie alle $g \in G$ mit $5 \circ g \circ 6 = 17$.

(3) Existiert in $G \setminus \{e\}$ ein Element von endlicher Ordnung?

Aufgabe 8. (1+1+2 Punkte) Es sei G eine Gruppe.

(1) Zeigen Sie, dass die Menge $U := \{x \in G \mid \langle x \rangle \text{ endlich}\}$ eine Untergruppe von G ist, falls G abelsch ist.

(2) Die Menge der 2×2-Matrizen über $\mathbb{Q}$ mit Determinante $\neq 0$ bilden zusammen mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe. Es seien

$$a := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } b := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie, ob die Elemente a,b, ab von endlicher oder unendlicher Ordnung sind. Ist ein Element $x \in \{a, b, ab\}$ von endlicher Ordnung, so bestimmen Sie $\mathrm{ord}(x) \in \mathbb{N}$.

(3) Es sei G eine zyklische Gruppe der Ordnung 12. Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente $g \in G$ mit $\langle g \rangle = G$.

Aufgabe 9. (4 Punkte) Es seien G eine Gruppe und $U \subseteq G$ eine Untergruppe von G. Weiter seien $x, y \in G$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $xU = yU$.
(ii) $xU \cap yU \neq \varnothing$.
(iii) $x^{-1}y \in U$.
(iv) Es existiert $u \in U$ mit $xu = y$.

Abgabetermin: Bis 08.11.24 um 12:00 Uhr im OLAT.