Daniel Bissinger **Algebra I LAG, WS 24/25**

Übungsserie 1

Aufgabe 1. (1+1+2 Punkte)

(1) Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.
   (i) Es gilt $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$.
   (ii) Es existieren $s, t \in \mathbb{Z}$ mit $sa + tb = 1$.

(2) Zeigen Sie, dass in (1) die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (i) nicht gilt, wenn wir in (i) und (ii) das Element 1 durch eine andere natürliche Zahl $n \neq 1$ ersetzen.

(3) Berechnen Sie mithilfe des euklidischen Algorithmus $\mathrm{ggT}(2013, 171)$ und bestimmen Sie $s, t \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(2013, 171) = 2013s + 171t$. Überprüfen Sie Ihre Berechnung von $\mathrm{ggT}(2013, 171)$ indem Sie das Ergebnis mit Aufgabe 4 verifizieren.

Aufgabe 2. (4 Punkte) Es seien $F_0 := 60, F_1 := 84$ und $\ell \in \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir induktiv

$$F_{n+1} := F_{n-1} + \ell \cdot F_n.$$

Berechnen Sie $\mathrm{ggT}(F_n, F_{n+1})$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 3. (4 Punkte) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen für eine Zahl $1 \neq p \in \mathbb{N}$.

(1) p ist eine Primzahl.

(2) Sind $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $p \mid ab$, dann gilt $p \mid a$ oder $p \mid b$.

Hinweis: Dieses Resultat wird in der Vorlesung benutzt, um den Hauptsatz der Arithmetik zu beweisen. Insbesondere kann dieser hier nicht benutzt werden. Verwenden Sie stattdessen Division mit Rest und dass in $\mathbb{Z}$ aus $xy = 0$ schon $x = 0$ oder $y = 0$ folgt.

Aufgabe 4. (1+2+1 Punkte) Es seien $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

(1) Es sei $p \in \mathbb{P}$ eine Primzahl. Zeigen Sie, dass $m_p(a) = \max\{t \in \mathbb{N}_0 \mid p^t \text{ teilt } a\}$ gilt.

(2) Es seien $a = (-1)^{\varepsilon_a} \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{m_p(a)}$ und $b = (-1)^{\varepsilon_b} \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{m_p(b)}$. Zeigen Sie

$$\mathrm{ggT}(a, b) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min\{m_p(a), m_p(b)\}}.$$

(3) Es sei $p \in \mathbb{P}$. Zeigen Sie, dass $m_p(xy) = m_p(x) + m_p(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt. Hier sei $m_p(1) := m_p(-1) := 0$.

Aufgabe 5. (2 Bonuspunkte) Es sei $p \in \mathbb{P}$ eine Primzahl, $1 \neq \alpha \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$.

(1) Es sei $j \in \{1, \dots, p^n - 1\}$ und $\ell \in \mathbb{N}_0$ mit $p^\ell \mid (p^n\alpha - j)$. Zeigen Sie $\ell \leq n$ und schließen Sie daraus $p^\ell \mid (p^n - j)$ und $m_p(p^n - j) \geq m_p(p^n\alpha - j)$.

(2) Zeigen Sie, dass $m_p\left[\binom{p^n\alpha}{p^n}\right] \leq m_p(\alpha)$ gilt.

Hinweis: Es gilt

$$\binom{p^n\alpha}{p^n} = \frac{\prod_{j=0}^{p^n-1}(p^n\alpha - j)}{\prod_{j=0}^{p^n-1}(p^n - j)}.$$

Abgabetermin: Bis 01.11.24 um 12:00 Uhr im OLAT.