Daniel Bissinger **Algebra I LAG, WS 24/25**

Präsenzserie 3

Präsenzaufgabe 5. Das 15-er Puzzle ist ein bekanntes Geduldspiel. Das Spiel besteht aus 15 quadratischen Spielsteinen, von 1 bis 15 durchnummeriert, die auf den 16 Feldern eines 4×4-Quadrats angebracht sind. Ziel des Spiels ist es eine gegebene Anordnung durch endlich viele Verschiebungen in die Ausgangsposition

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

zu überführen. Wir wollen in dieser Aufgabe beweisen, dass dies für

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

nicht möglich ist.

(1) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $a \neq b \in \{1, \dots, n\}$. Wir bezeichnen mit $\tau_{a,b} \in \mathcal{S}_n$ die Permutation mit $\tau_{a,b}(a) = b, \tau_{a,b}(b) = a$ und $\tau_{a,b}(i) = i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{a, b\}$. Permutationen dieser Art heißen **Transposition**. Zeigen Sie $\operatorname{sgn}(\tau_{1,2}) = -1$. [1]

(2) Es seien $a \neq b$ und $\sigma \in \mathcal{S}_n$ eine Permutation mit $\sigma(a) = 1$, $\sigma(b) = 2$. Zeigen Sie $\sigma \circ \tau_{a,b} = \tau_{1,2} \circ \sigma$ und schließen Sie daraus $\operatorname{sgn}(\tau_{a,b}) = -1$.

(3) Wir fassen eine Anordnung der Zahlen $1, \dots, 15$ im Quadrat als Permutation in $\mathcal{S}_{16}$ auf. Dabei steht das „freie“ Kästchen für die Zahl 16. Die Ausgangsposition steht also für Element $\mathrm{id} \in \mathcal{S}_{16}$, wohingegen die Anordnung

1	2	3	4
5	6	7	
9	10	12	8
13	14	11	15

[1] Diese Notation werden wir nur für diese Aufgabe nutzen. Im Verlauf der Vorlesung werden wir zur Zykelschreibeweise $\tau_{a,b} = (a, b)$ übergehen.

das Element

$$\pi := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 16 & 9 & 10 & 12 & 8 & 13 & 14 & 11 & 15 \end{pmatrix}$$

beschreibt. Es sei $M \subseteq \mathcal{S}_{16}$ die Menge aller Permutationen, die zu Anordnungen gehören, die durch endlich viele Verschiebungen aus der Ausgangsposition entstanden sind. Jede Permutation in M ist damit insbesondere eine Komposition von endlich vielen Transpositionen $\tau_{i,16}$ (für geeignete Zahlen $i \in \{1, \ldots, 15\}$). Wir illustrieren die Interpretation anhand der nachfolgenden Folge von Umformungen:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14		15

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10		12
13	14	11	15

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	12	
13	14	11	15

1	2	3	4
5	6	7	
9	10	12	8
13	14	11	15

Die zugehörigen Transpositionen sind

$$\tau_{15,16}, \tau_{11,16}, \tau_{12,16}, \tau_{8,16}$$

und die Anordnung

1	2	3	4
5	6	7	
9	10	12	8
13	14	11	15

wird durch $\tau_{8,16} \circ \tau_{12,16} \circ \tau_{11,16} \circ \tau_{15,16} = \pi$ beschrieben. Es gilt also $\pi \in M$.

Begründen Sie, dass $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$ für alle $\sigma \in M \cap \operatorname{Stab}_{\mathcal{S}_{16}}(16)$ gilt.
Hinweis: Betrachten Sie die Verschiebung des freien Feldes in horizontaler und vertikaler Richtung.

(4) Zeigen Sie, dass

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

nicht in die Ausgangsposition überführt werden kann.

Präsenzaufgabe 6. Es sei $\varphi\colon G \longrightarrow G'$ ein Homomorphismus von Gruppen.

(1) Zeigen Sie, dass für φ bijektiv die Umkehrabbildung $\varphi^{-1}\colon G' \longrightarrow G$ ein Homomorphismus ist.
(2) Es sei $V \subseteq G'$ eine Untergruppe von G'. Zeigen Sie, dass $\varphi^{-1}(V)$ eine Untergruppe von G ist.
(3) Es seien N_1, N_2 Normalteiler von G. Zeigen Sie, dass N_1N_2 ein Normalteiler von G ist.
(4) Es seien $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler und $\overline{\varphi}\colon G/N \longrightarrow G'$ ein Homomorphismus mit $\overline{\varphi} \circ \pi = \varphi$, wobei $\pi\colon G \longrightarrow G/N$ die kanonische Projektion bezeichnet. Zeigen Sie, dass $N \subseteq \ker \varphi$ gilt.
(5) Es sei $U \subseteq G$ eine Untergruppe von G. Zeigen Sie, dass $\varphi(U)$ eine Untergruppe von G' ist.

Bemerkung: Aussage (4) besagt, dass die Voraussetzung $N \subseteq \ker \varphi$ notwendig für die Folgerung im Homomorphiesatz ist.

Die Präsenzserie wird gemeinsam in den Übungen am 13.11.24 bearbeitet.