**Daniel Bissinger** **Algebra I LAG, WS 24/25**

# Präsenzserie 2

**Präsenzaufgabe 3.** Kreuzen Sie diejenigen Aussagen an, die für jede endliche Gruppe $G$ mit neutralem Element $e$ richtig sind. Begründen Sie Ihre Antworten mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel.

- ◯ $G$ hat mindestens $2$ Elemente.
- ◯ Ist $H \subseteq G$ eine beliebige Untergruppe, so erhält $G/H$ durch $(xH)(yH) := xyH$ für alle $x, y \in G$ die Struktur einer Gruppe.
- ◯ Gilt für eine Untergruppe $H \subseteq G$ die Bedingung $[G : H] = 12$, so ist $4$ ein Teiler von $|G|$.
- ◯ Hat $G$ die Ordnung 250, so besitzt $G$ keine Untergruppe der Ordnung 4.
- ◯ Es gilt $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$ für alle $x, y \in G$.
- ◯ Die Gleichung $x^2 = x$ hat in $G$ genau zwei Lösungen.
- ◯ Sind $x, y \in G$ mit $xyx^{-1} = y$, so gilt $xy = yx$.
- ◯ Ist $|G|$ ungerade, so existiert kein Element $x \in G \setminus \{e\}$ mit $x^2 = e$.
- ◯ Ist die Ordnung von $G$ durch $4$ teilbar und ist $H \subseteq G$ eine Untergruppe mit $[G : H] = 2$, so ist $|G \setminus H|$ ungerade.
- ◯ Es gilt $\mathrm{ord}(xy) = \mathrm{ord}(yx)$ für alle $x, y \in G$.

**Präsenzaufgabe 4.** Es sei $\mathcal{S}_3$ die symmetrische Gruppe auf der Menge $\{1, 2, 3\}$. Weiter seien $\tau := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ und $\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(1) Berechnen Sie die Untergruppen $U_1 := \langle \tau \rangle$, $U_2 := \langle \sigma \rangle$ und $U_3 := \langle \{\sigma, \tau\} \rangle$.
(2) Bestimmen die Ordnung von $\tau \circ \sigma \circ \sigma$.
(3) Bestimmen Sie jeweils die Linksnebenklassen von $U_1, U_2$ und $U_3$ in $\mathcal{S}_3$.
(4) Zeigen Sie, dass $U_2, U_3$ Normalteiler von $\mathcal{S}_3$ sind, $U_1$ jedoch nicht.

Die Präsenzserie wird gemeinsam in den Übungen am 06.11.24 bearbeitet.