Daniel Bissinger **Algebra I LAG, WS 24/25**

Präsenzserie 1

Präsenzaufgabe 1.

(1) In $\mathbb{Z}$ folgt für $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ mit $z_1 \cdot z_2 = 0$ schon $z_1 = 0$ oder $z_2 = 0$. Leiten Sie aus dieser Tatsache ab, dass für $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $a \neq 0$ und $ab = ac$ schon $b = c$ gilt.

(2) Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \neq 0$ oder $b \neq 0$. Zeigen Sie $\mathrm{ggT}(\frac{a}{\mathrm{ggT}(a,b)}, \frac{b}{\mathrm{ggT}(a,b)}) = 1$.

(3) Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \neq 0$ oder $b \neq 0$. Gilt stets $\mathrm{ggT}(\frac{a}{\mathrm{ggT}(a,b)}, b) = 1$?

(4) Berechnen Sie $\mathrm{ggT}(1872, 33)$ und finden Sie $(s, t) \neq (s', t') \in \mathbb{Z}^2$ mit

$$1872s + 33t = \mathrm{ggT}(1872, 33) = 1872s' + 33t'$$

(5) Gibt es unendlich viele verschiedene Paare (s, t) wie in (4)?

Präsenzaufgabe 2. Es sei $G := \{(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3 \mid a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\}$.

(1) Zeigen Sie, dass G mit der Multiplikation

$$(a, b, c) \cdot (a', b', c') := (aa', bb', ac' + cb')$$

eine Gruppe ist, die nicht abelsch ist.

(2) Zeigen Sie, dass $U := \{(1, 1, c) \in \mathbb{Q}^3 \mid c \in \mathbb{Z}\} \subseteq G$ eine Untergruppe von G ist.

(3) Zeigen Sie, dass U zyklisch ist.

Die Präsenzserie wird gemeinsam in den Übungen am 30.10.24 bearbeitet.