Algebra I (LAG) **Klausur vom 20.02.2025**

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	Σ
10	10	10	10	10	10	10	70

Hinweise

- Diese Klausur besteht aus 7 Aufgaben in denen jeweils 10 Punkte erreicht werden können. Die mögliche Gesamtpunktzahl beträgt also 70 Punkte.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben bitte direkt unter der Aufgabenstellung. Sollte der Platz nicht ausreichen, fahren Sie auf der entsprechenden Rückseite (oder Rückseite des vorherigen Blatts) fort und kennzeichnen Sie dies entsprechend.
- Begründen Sie Ihre Aussagen.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten.
- Neben Schreibzeug, Ausweis/Studierendenausweis und Verpflegung dürfen keine weiteren Hilfsmittel mit an den zugewiesenen Arbeitsplatz genommen werden.
- Sie dürfen innerhalb einer Aufgabe einen vorangegangenen Aufgabenteil auch dann verwenden, wenn Sie diesen Teil nicht bearbeitet haben.

Viel Erfolg!

Algebra I (LAG) **Klausur vom 20.02.2025**

Aufgabe 1. Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und setzen Sie bei jeder Aussage genau ein Kreuz. Richtig gesetzte Kreuze geben 1 Punkt und falsch gesetzte Kreuze geben keinen Punkt. Wenn Sie ein gesetztes Kreuz korrigieren wollen, füllen Sie die Box mit dem falsch gesetzten Kreuz aus und markieren Sie die andere Box mit einem Kreuz.

(1) Entscheiden Sie bei den folgenden Aussagen, ob diese für **jeden** kommutativen Ring $R \neq \{0\}$ richtig sind.

Ist $a \in R$ eine Einheit, so ist a kein Nullteiler.	☐ wahr	☐ falsch
Ist R ein faktorieller Ring, so ist R ein Hauptidealring.	☐ wahr	☐ falsch
Sind $a, b \in R \setminus \{0\}$, so gilt $ab \neq 0$.	☐ wahr	☐ falsch
Sind I, J teilerfremde Ideale von R, so gilt $I \cdot J = R$.	☐ wahr	☐ falsch
Ist $p \in \mathbb{P}$ eine Primzahl, so ist $\mathbb{Z}/(p)[X]$ ein Hauptidealring.	☐ wahr	☐ falsch

(2) Entscheiden Sie bei den folgenden Aussagen, ob diese für **jeden** Körper K bzw. **jede** Körpererweiterung $L : K$ richtig sind.

Ist $\alpha \in K$ mit $\alpha^2 - \alpha = 0$, so gilt $\alpha \in \{0, 1\}$.	☐ wahr	☐ falsch
Es ist K mit der Multiplikation von K eine Gruppe.	☐ wahr	☐ falsch
Es ist K ein Hauptidealring.	☐ wahr	☐ falsch
Ist $L : K$ algebraisch und $f \in L[X] \setminus L$ ein Polynom, so besitzt f mindestens eine Nullstelle in L.	☐ wahr	☐ falsch
Sind $a, b \in L$ mit a transzendent über K und b algebraisch über K, so ist $a + b$ transzendent über K.	☐ wahr	☐ falsch

Aufgabe 2. (4+3+3 Punkte) Es bezeichne $\mathcal{S}_8$ die symmetrische Gruppe auf der Menge $\{1, \ldots, 8\}$. Es seien die Elemente $\sigma_1 := (1,2) \circ (2,5) \circ (7,8)$ und $\sigma_2 := (6,8) \circ (4,3,5) \circ (8,6) \circ (2,7)$ in $\mathcal{S}_8$ gegeben.

(1) Existiert ein Element $\tau \in \mathcal{S}_8$ mit $\tau \circ \sigma_1 \circ \tau^{-1} = \sigma_2$? Wenn ein solches Element existiert, geben Sie ein solches Element an.
(2) Geben Sie ein Element $\sigma \in \mathcal{S}_8$ an, sodass $\sigma \circ \sigma_2$ in der alternierenden Untergruppe $\mathcal{A}_8$ von $\mathcal{S}_8$ enthalten ist.
(3) Schreiben Sie $(\sigma_2)^3$ als Produkt von Zykeln mit paarweise disjunkten Trägern.

Aufgabe 3. (3+3+4 Punkte) Es seien G_1, G_2, H Gruppen und H sei zusätzlich abelsch. Weiter seien

$$\varphi_1 \colon G_1 \longrightarrow H \text{ und } \varphi_2 \colon G_2 \longrightarrow H$$

Homomorphismen von Gruppen.

(1) Zeigen Sie, dass

$$N := \{(x, y) \in G_1 \times G_2 \mid \varphi_1(x) = \varphi_2(y)\}$$

eine Untergruppe von $G_1 \times G_2$ ist.

(2) Zeigen Sie, dass die Untergruppe $N \subseteq G_1 \times G_2$ aus (1) ein Normalteiler von $G_1 \times G_2$ ist.

(3) Berechnen Sie die Anzahl der Elemente in N für den Fall

$$\varphi_1 \colon \mathcal{C}_8 \longrightarrow \mathcal{C}_2 \,; x \mapsto x^4 \text{ und } \varphi_2 \colon \mathcal{C}_{12} \longrightarrow \mathcal{C}_2 \,; y \mapsto y^6.$$

Hinweis: Es sei $n \in \mathbb{N}$. Nach Definition aus der Vorlesung ist $\mathcal{C}_n \subseteq (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln. Sie müssen nicht beweisen, dass φ_1, φ_2 Homomorphismen von Gruppen sind.

Aufgabe 4. (3+3+4 Punkte)

(1) Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle abelschen Gruppen der Ordnung $2025 = 3^4 \cdot 5^2$.
(2) Schreiben Sie die Gruppe $\mathcal{C}_6 \times \mathcal{C}_{12} \times \mathcal{C}_{30}$ bis auf Isomorphie als direktes Produkt von zyklischen Gruppen von Primzahlpotenz.
(3) Bestimmen Sie die Anzahl aller Untergruppen von $\mathbb{Z}/\langle 3\rangle \times \mathbb{Z}/\langle 3\rangle$ und geben Sie diese Untergruppen an.

Aufgabe 5. (2+2+3+3 Punkte)

(1) Es sei $R \neq \{0\}$ ein kommutativer Ring. Geben Sie die Definition einer Einheit a in R und eines Nullteilers b in R an.
(2) Begründen Sie, dass $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $7a+16b = 3$ existieren. Sie müssen diese Element nicht konkret angeben.
(3) Begründen Sie, dass $7 + (16)$ eine Einheit in dem Ring $\mathbb{Z}/(16)$ ist, und $6 + (20)$ keine Einheit in dem Ring $\mathbb{Z}/(20)$ ist. Bestimmen Sie weiter ein Element $x \in \{0, 1, 2, \ldots, 15\}$ mit $(x + (16)) \cdot (7 + (16)) = 1_{\mathbb{Z}/(16)}$.
(4) Schreiben Sie das Element $(4 + (17))^{50}$ in der Form $y + (17)$ mit $y \in \{0, \ldots, 16\}$.

Hinweis zur Notation: In Aufgabenteil (3) soll das Element $x + (16)$ mit dem Element $7+(16)$ in $\mathbb{Z}/(16)$ multipliziert werden. In Aufgabenteil (4) soll eine Potenz des Elements $4 + (17)$ in $\mathbb{Z}/(17)$ berechnet werden.

Aufgabe 6. (2+3+2+3 Punkte)

(1) Es sei R ein Integritätsbereich. Geben Sie die Definition eines irreduziblen Elements r in R an.
(2) Zeigen Sie, dass $f := X^7 + 2X^5 + 10X + 2$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist und untersuchen Sie $g := 5X^7 + 10X^5 + 50X + 10$ auf Irreduzibilität in $\mathbb{Z}[X]$ und $\mathbb{Q}[X]$.
(3) Es sei $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$ mit $\alpha^8 + 2\alpha^6 + 10\alpha^2 + 2\alpha = 0$. Zeigen Sie, dass $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 7$ gilt.
(4) Es sei α wie in (3) und $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha) \setminus \mathbb{Q}$. Bestimmen Sie $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}]$ und $[\mathbb{Q}(\beta^2) : \mathbb{Q}]$.

Aufgabe 7. (3+2+2+3 Punkte)

(1) Wann heißt eine endliche Körpererweiterung $L : K$ Galoiserweiterung? Geben Sie zwei äquivalente Definitionen an.
(2) Entscheiden Sie, ob $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+5) : \mathbb{Q}$ eine normale Erweiterung ist.
(3) Entscheiden Sie, ob $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}$ eine normale Erweiterung ist.
(4) Es sei $L : K$ eine Galoiserweiterung mit $[L : K] = 27$ und zyklischer Galoisgruppe. Bestimmen Sie die Anzahl der Teilkörper Q von L mit $K \subseteq Q \subseteq L$.