Daniel Bissinger **Algebra I, WS 21/22**

Übungsserie 11

Aufgabe 1. Es sei K ein Körper.

(1) Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:
   (a) $K^\times$ ist eine zyklische Gruppe.
   (b) K ist ein endlicher Körper.

(2) Ist $L : K$ eine algebraische Körpererweiterung und K endlich, so existiert für jedes $x \in L \setminus \{0\}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n = 1$.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper mit endlich vielen Elementen.

(1) Zeigen Sie, dass K nicht algebraisch abgeschlossen ist.
(2) Zeigen Sie, dass $|K|$ eine Primzahlpotenz ist.

Aufgabe 3. Es sei $L \subseteq \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper von $f := X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ über $\mathbb{Q}$ und $\zeta := \exp(\frac{2\pi i}{3}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Bestimmen Sie den Grad der Körpererweiterung $L : \mathbb{Q}$.

Aufgabe 4. Es sei L ein Körper und $G \subseteq \mathrm{Aut}(L)$ eine zu $\mathcal{S}_4$ isomorphe Gruppe. Zeigen Sie die Existenz von Zwischenkörpern $L^G \subseteq Q \subseteq M \subseteq L$, sodass die Erweiterungen $Q : L^G$, $M : L^G$ und $M : Q$ alle nicht normal sind.

Abgabetermin: Bis 26.01. um 14:15 Uhr im OLAT
Dies ist die letzte Übungsserie.