Daniel Bissinger **Algebra I, WS 21/22**

Übungsserie 10

Aufgabe 1. Es sei $L : K$ eine Körpererweiterung und $\alpha \in L$ algebraisch über K. Weiter sei $\mu \in K[X]$ ein Polynom. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen.

(1) Es gilt $\mu = \mu_\alpha$.
(2) μ ist normiert, $\mu(\alpha) = 0$ und teilt jedes Polynom $f \in K[X]$ mit $f(\alpha) = 0$.
(3) μ ist irreduzibel, normiert und $\mu(\alpha) = 0$.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie den Grad der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}$.

Aufgabe 3. Sei $\alpha := \sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie das Minimalpolynom μ_α von α über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 4. Es sei $L : K$ eine Körpererweiterung. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(1) Ist $L : K$ algebraisch und $\mathcal{P}$ die Menge der normierten irreduziblen Polynome in $K[X]$, so gilt $L = \bigsqcup_{f \in \mathcal{P}} Z_L(f)$, wobei $Z_L(f) := \{a \in L \mid f(a) = 0\}$ für alle $f \in \mathcal{P}$.
(2) Die Erweiterung $\mathbb{R} : \mathbb{Q}$ ist nicht algebraisch.

Abgabetermin: Bis 19.01. um 14:15 Uhr im OLAT.