Daniel Bissinger **Algebra I, WS 21/22**

Übungsserie 

Aufgabe 1. Es sei $\mathfrak{a} = \{f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X] \mid a_0 \in 2\mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}[X]$ die Menge aller Polynome in $\mathbb{Z}[X]$ deren konstanter Koeffizient von 2 geteilt wird. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(1) $\mathfrak{a}$ ist ein Ideal in $\mathbb{Z}[X]$.
(2) $\mathfrak{a}$ ist kein Hauptideal.
(3) $\mathbb{Z}[X]$ ist ein faktorieller Ring.

Aufgabe 2. Es sei R ein kommutativer Ring, $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass die Ringe $R[X_1, \ldots, X_n]$ und $R[X_1, \ldots, X_{n-1}][X_n]$ zueinander isomorph sind.

Aufgabe 3. Es sei R ein Integritätsbereich und $\mathfrak{p}$ ein Primideal von R. Weiter sei $S := R/\mathfrak{p}$, $\pi \colon R \longrightarrow S \; ; \; r \mapsto r + \mathfrak{p}$ die kanonische Projektion und

$$\pi^* \colon R[X] \longrightarrow S[X] \; ; \; \sum_{i=0}^{n} r_i X^i \mapsto \sum_{i=0}^{n} \pi(r_i) X^i$$

der induzierte Ringhomomorphismus. Zeigen Sie: Ist $f = \sum_{i=0}^{n} r_i X^i \in R[X]$ ein normiertes Polynom von Grad n und ist $\pi^*(f)$ irreduzibel in $S[X]$, so ist f irreduzibel in $R[X]$.

Aufgabe 4.

(1) Zeigen Sie, dass das Polynom $f := 4X^4 + 6X^3 - 9X^2 + 6$ irreduzibel in $\mathbb{Z}[X]$ ist.
(2) Bestimmen Sie alle irreduziblen Polynome in $\mathbb{Z}/(2)[X]$ von Grad 2.
(3) Ist $g := X^4 - 10X^3 + 6X^2 - 3X + 9$ irreduzibel in $\mathbb{Z}[X]$?

Abgabe: Bis 12.01. um 14:15 Uhr.