Daniel Bissinger **Algebra I, WS 21/22**

Übungsserie 8

Aufgabe 1. Es sei R ein kommutativer Ring, in dem jedes Ideal endlich erzeugt ist. Weiter sei $(I_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ eine Familie von Idealen von R mit der Eigenschaft $I_i \subseteq I_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie die Existenz von $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $I_j = I_{n_0}$ für alle $j \geq n_0$.

Aufgabe 2. Es sei R ein Hauptidealring, $p \in R$ ein irreduzibles Element und $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen die Mächtigkeit der Menge $\mathrm{Id}(R/(p^n))$ und geben Sie alle Elemente an.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die Ringe $\mathbb{Z}[X]/(5, X)$ und $\mathbb{Z}/(5)$ isomorph sind.

Aufgabe 4. Es sei K ein Körper und $f \in K[X]\backslash\{0\}$ ein Polynom. Beweisen Sie folgende Aussagen.

(1) Sei $\alpha \in K$. Es existiert $q \in K[X]$ mit $f = (X - \alpha)q$ genau dann, wenn α eine Nullstelle von f ist, d.h. $f(\alpha) = 0$.
(2) Ist $\deg(f) = 1$, so ist f irreduzibel.
(3) Sei $f \in K[X]$ ein Polynom von Grad $2 \leq \deg(f) \leq 3$. Zeigen Sie, dass f genau dann irreduzibel ist, wenn f keine Nullstelle besitzt.

Abgabetermin: Bis 22.12. um 14:15 Uhr.