Daniel Bissinger **Algebra I, WS 21/22**

Übungsserie 7

Aufgabe 1. Sei $f : R \longrightarrow S$ ein surjektiver Homomorphismus von Ringen, $I \trianglelefteq S$ ein Ideal. Dann existiert ein Isomorphismus $R/f^{-1}(I) \cong S/I$ von Ringen.

Aufgabe 2. Es sei $D \subseteq R$ eine multiplikativ abgeschlossene Menge eines kommutativen Rings R. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(1) Auf der Menge $R \times D$ wird vermöge
$$(r_1, d_1) \sim (r_2, d_2) :\Leftrightarrow \exists\, d \in D \text{ mit } d(r_1 d_2 - r_2 d_1) = 0$$
eine Äquivalenzrelation definiert.

(2) Es sei $R := \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) \;;\; a, b \in \mathbb{Z}\}$ sowie $D := \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\}$.
   (a) D ist eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge des kommutativen Rings $R \subseteq \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z})$.
   (b) Die Relation
   $$(r_1, d_1) \sim (r_2, d_2) :\Leftrightarrow r_1 d_2 = r_2 d_1$$
   auf $R \times D$ is reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv.

Aufgabe 3. Es sei $R \neq \{0\}$ ein kommutativer Ring. Für ein Ideal $I \subseteq R$ definieren wir
$$\sqrt{I} := \{r \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} : r^n \in I\}.$$
Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(1) $\sqrt{I}$ ist ein Ideal von R.
(2) Der Faktorring $R/\sqrt{I}$ ist **reduziert**, d.h. ist $x \in R/\sqrt{I}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n = 0_{R/\sqrt{I}}$, so gilt bereits $x = 0$.
(3) Bestimmen Sie $\sqrt{\{0\}}$ in $\mathbb{Z}/(60)$.

Aufgabe 4. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ teilerfremd.

(1) Zeigen Sie die Isomorphie von Ringen $\mathbb{Z}/(mn) \cong \mathbb{Z}/(m) \times \mathbb{Z}/(n)$.
(2) Sei $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ die Eulersche φ-Funktion. Zeigen Sie unter Verwendung von (1), dass $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ gilt.

Abgabetermin: Bis 15.12. um 14:15 Uhr.