Daniel Bissinger **Algebra I, WS 21/22**

Übungsserie 6

Aufgabe 1. Sei X eine nicht-leere Menge und $R := \mathbb{Z}/\langle 2\rangle$ mit kanonischer Ringstruktur. Beweisen oder widerlegen Sie: Die in der Vorlesung definierten Ringe $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$ und $(\mathrm{Abb}(X, R), +, \cdot)$ sind isomorph.

Aufgabe 2. Wir betrachten den Unterring $\mathbb{Z}[i] := \{a+ib\ ;\ a, b \in \mathbb{Z}\}$ des Körpers $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Zeigen Sie:

(1) $\mathfrak{m} := \{x(1+i)+y(1-i)\ ;\ x, y \in \mathbb{Z}[i]\}$ ist ein Ideal von $\mathbb{Z}[i]$ mit $\mathfrak{m} \neq \mathbb{Z}[i]$.
(2) $\mathfrak{m}$ ist ein maximales Ideal von $\mathbb{Z}[i]$.

Aufgabe 3. Es sei $R \neq \{0\}$ ein kommutativer Ring, sowie $\mathrm{Id}(R)^- := \{I \subsetneq R\ ;\ I \text{ ist Ideal}\}$. Es sei $\mathfrak{A} \subseteq \mathrm{Id}(R)^-$ mit $\mathfrak{A} \neq \emptyset$ eine total geordnete Teilmenge bezüglich $\subseteq$, d.h. für je zwei Elemente $I, J \in \mathfrak{A}$ gilt $I \subseteq J$ oder $J \subseteq I$.

(1) Zeigen Sie: $\bigcup_{I \in \mathfrak{A}} I \in \mathrm{Id}(R)^-$.
(2) Schließen Sie unter Verwendung des Zornschen Lemmas, dass jedes echte Ideal $I \subsetneq R$ in einem maximalen Ideal enthalten ist.

Aufgabe 4. Es sei $(\mathbb{Q}, +)$ die abelsche Gruppe der rationalen Zahlen. Wir definieren eine Multiplikation auf $\mathbb{Q}$ durch $x * y := 0$ für alle $x, y \in \mathbb{Q}$. Das Tupel $R := (\mathbb{Q}, +, *)$ erhält die Struktur eines kommutativen **nicht unitären Rings**. Das heißt R erfüllt alle Axiome eines Rings bis auf die Existenz eines neutralen Elements bzgl. $*$. Wie im Fall von Ringen definieren wir Ideale und maximale Ideale. Zeigen Sie, dass R kein maximales Ideal besitzt.

Abgabetermin: Bis 08.12. um 14:15 Uhr.