Daniel Bissinger **Algebra I, WS 21/22**

Übungsserie 5

Aufgabe 1. Sei G eine Gruppe der Ordnung 343. Angenommen, G operiere auf einer Menge X der Kardinalität $|X|=26$ derart, dass $|X/G|=8$ gilt. Berechnen Sie die Anzahl der Fixpunkte der Operation.

Aufgabe 2. Es sei G eine endliche einfache Gruppe mit einer echten Untergruppe $U \subsetneq G$, sodass $[G:U] > 2$. Zeigen Sie, dass dann $|G|$ ein Teiler von $\frac{[G:U]!}{2}$ ist.
Hinweis: Operieren Sie mit G geeignet auf der Menge G/U der Linksnebenklassen.

Aufgabe 3. Es seien $p \in \mathbb{P}$ eine Primzahl und G eine Gruppe der Ordnung $p+1$. Beweisen oder widerlegen Sie: Es gibt einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon \mathcal{S}_{p+1} \longrightarrow G$.

Aufgabe 4. Es sei G eine Gruppe der Ordnung 12.

(1) Zeigen Sie, dass G einen Normalteiler der Ordnung 3 oder 4 besitzt.
(2) Schließen Sie, dass $\mathcal{S}_4$ eine auflösbare Gruppe ist.

Abgabe: Bis 01.12. um 14:15 Uhr.