Daniel Bissinger **Algebra I, WS 21/22**

Übungsserie 4

Aufgabe 1. Sei $2 \leq l \leq n \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{P}$ eine Primzahl.

(1) Zeigen Sie, dass jeder l-Zykel $\sigma \in \mathcal{S}_n$ von Ordnung l ist.
(2) Sei $\sigma \in \mathcal{S}_n$ von Ordnung p und $p \leq n < 2p$. Zeigen Sie, dass σ ein p-Zykel ist.
(3) Zeigen Sie, dass die Anzahl der l-Zyklen in S_n durch $\frac{n!}{(n-l)!l}$ gegeben ist.

Hinweis zu (3): Operieren Sie mit $\mathcal{S}_n$ auf einer geeigneten Menge X und verwenden Sie die Bahnformel.

Aufgabe 2. Eine Gruppe G operiere transitiv auf einer nichtleeren Menge X.

(1) Sei $\varphi : G \longrightarrow S_X$ der zugehörige Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass für alle $x \in X$ die Gleichung

$$\ker \varphi = \bigcap_{g \in G} g G_x g^{-1}$$

gilt.
(2) Ist G zusätzlich endlich, abelsch und die Operation treu, dann gilt $|G| = |X|$.

Aufgabe 3. Es sei G eine Gruppe der Ordnung 60. Wir betrachten die Operation von G auf $X := G$ durch Konjugation. Zeigen Sie: Gilt $|X/G| = 5$ und existiert für $l \in \{15, 20\}$ genau eine Bahn der Länge l, so ist G eine einfache Gruppe, d.h. $G \neq \{e\}$ und die einzigen Normalteiler von G sind $\{e\}$ und G selbst.

Aufgabe 4. Sei G eine endliche Gruppe mit

(a) $|G| = pq$ für Primzahlen $p < q$, und
(b) $p \nmid (q-1)$.

Zeigen Sie die Isomorphie $G \cong \mathbb{Z}/\langle p \rangle \times \mathbb{Z}/\langle q \rangle \cong \mathbb{Z}/\langle pq \rangle$.

Abgabetermin: Bis 24.11. um 14:15 Uhr.