Daniel Bissinger **Algebra I, WS 21/22**

Übungsserie 3

Aufgabe 1. Es sei $n \geq 3$. Zeigen Sie, dass die Gruppe $\mathcal{A}_n$ durch 3-Zykel erzeugt wird.

Aufgabe 2. Es sei k ein Körper. Zeigen Sie, dass die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}_n(k)$ das semidirekte Produkt der speziellen linearen Gruppe $\mathrm{SL}_n(k)$ und der Gruppe

$$U := \{(a_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(k) \; ; \; a_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j \text{ und } a_{ii} = 1 \text{ für } i \geq 2\}$$

ist.

Aufgabe 3. Es seien p, q verschiedene Primzahlen und G eine Gruppe der Ordnung pq mit einer Untergruppe H der Ordnung p und einem Normalteiler N der Ordnung q. Zeigen Sie die Existenz eines Homomorphismus $\gamma \colon H \longrightarrow \mathrm{Aut}(N)$, sodass $G \cong N \rtimes_\gamma H$ gilt.

Aufgabe 4. Es sei G eine Gruppe, $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler und $\pi \colon G \longrightarrow G/N$ die kanonische Projektion.

(1) Beweisen Sie: Ist $\varphi \colon G/N \longrightarrow G$ ein Homomorphismus mit $\pi \circ \varphi = \mathrm{id}_{G/N}$, so ist

$$\gamma \colon G/N \longrightarrow \mathrm{Aut}(N), gN \mapsto \iota_{\varphi(gN)} \colon \begin{cases} N \longrightarrow N \\ n \mapsto \varphi(gN) n \varphi(gN)^{-1} \end{cases}$$

eine wohldefinierter Homomorphismus. Zeigen Sie weiter, dass dann G und $N \rtimes_\gamma G/N$ isomorphe Gruppen sind.

(2) Geben Sie eine Gruppe G zusammen mit einem Normalteiler $N \trianglelefteq G$ an, sodass $G \ncong N \rtimes_\gamma G/N$ für alle Gruppenhomomorphismen $\gamma \colon G/N \longrightarrow \mathrm{Aut}(N)$ gilt.

Abgabetermin: Bis 17.11. um 14:15 Uhr.