Daniel Bissinger **Algebra I, WS 21/22**

Übungsserie 1

Aufgabe 1. Es sei $\mathbb{R}^\times := \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir definieren die Verknüpfung

$$*\colon \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}^\times \longrightarrow \mathbb{R}^\times; (a,b) \mapsto a * b := |a| \cdot b.$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(1) $(\mathbb{R}^\times, *)$ ist eine Halbgruppe.
(2) Es existiert $f \in \mathbb{R}^\times$ mit
   (i) $f * b = b$ für alle $b \in \mathbb{R}^\times$,
   (ii) zu jedem $a \in \mathbb{R}^\times$ existiert $a' \in \mathbb{R}^\times$ mit $a * a' = f$.
(3) $(\mathbb{R}^\times, *)$ ist keine Gruppe.

Aufgabe 2. Es sei X eine Menge und $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X. Für $A, B \in \mathcal{P}(X)$ sei $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ die symmetrische Differenz von A und B.

(1) Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}(X)$ mit der Verknüpfung

$$\mu\colon \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X), (A,B) \mapsto A \Delta B$$

die Struktur einer abelschen Gruppe erhält. Sie dürfen benutzen, dass für alle $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$ die Gleichung

$$(A \Delta B) \Delta C = (A \cup B \cup C) \cap (A \cup B^c \cup C^c) \cap (A^c \cup B \cup C^c) \cap (A^c \cup B^c \cup C)$$

gilt. Hier bezeichnet ^{c} das mengentheoretische Komplement in X.
(2) Seien $A, B, C, D \in \mathcal{P}(X)$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen.
   (a) $A \Delta B = C \Delta D$
   (b) $A \Delta C = B \Delta D$.

Aufgabe 3. Sei $p \in \mathbb{P}$ eine Primzahl und $\langle p \rangle \subseteq \mathbb{Z}$ die Untergruppe der durch p teilbaren Zahlen. Wir definieren $G := \mathbb{Z}/\langle p \rangle \setminus \{0 + \langle p \rangle\}$. Beweisen Sie:

(1) Die Zuweisung

$$\cdot\colon G \times G \longrightarrow G, (a + \langle p \rangle, b + \langle p \rangle) \mapsto (a + \langle p \rangle) \cdot (b + \langle p \rangle) := ab + \langle p \rangle$$

ist eine wohldefinierte Abbildung.
(2) $(G, \cdot)$ ist eine Gruppe.

Sie dürfen hierbei das **Lemma von Bézout** ohne Beweis verwenden: Sind $a, b \in \mathbb{Z}$, dann existieren $s, t \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a,b) = sa + tb$.

Aufgabe 4. Es sei $p \in \mathbb{P}$ eine Primzahl. Wir bezeichnen mit m_p die Funktion

$$m_p \colon \mathbb{Z} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}_0, z \mapsto \max\{n \in \mathbb{N}_0 \mid p^n \text{ teilt } z\}.$$

Weiter seien $\alpha \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(1) $m_p(p^n\alpha - j) = m_p(p^n - j)$ für alle $j \in \{1, \ldots, p^n - 1\}$.

(2) Es gilt

$$m_p(\binom{p^n\alpha}{p^n}) = m_p(\alpha).$$

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $m_p(z_1z_2) = m_p(z_1) + m_p(z_2)$ für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt.

Abgabetermin: Am 03.11. in den Übungen.