Daniel Bissinger **WS 21/22**
31.03.2022

Klausur zur Algebra I

Hinweise

- Diese Klausur besteht aus 6 Aufgaben in denen jeweils 10 Punkte erreicht werden können. Die mögliche Gesamtpunktzahl beträgt also 60 Punkte.
- Begründen Sie jede Ihrer Aussagen.
- Sie dürfen innerhalb einer Aufgabe einen vorangegangenen Aufgabenteil auch dann verwenden, wenn Sie diesen Teil nicht bearbeitet haben.
- Denken Sie bei der Abgabe Ihrer Bearbeitung daran das ausgefüllte Deckblatt mit einzureichen.

1. Aufgabe Es sei G eine Gruppe und $Z(G) = \{x \in G \mid gx = xg \; \forall \; g \in G\}$ die Zentrumsuntergruppe von G.

(1) Zeigen Sie, dass jede Untergruppe von U von $Z(G)$ ein Normalteiler von G ist.
(2) Nun sei G eine endliche und einfache Gruppe. Wir betrachten die Operation von G auf $X := G$ durch Konjugation

$$G \times X \longrightarrow X \; ; \; (g, x) \mapsto g.x := gxg^{-1}.$$

Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen.
   (a) Es existiert eine Primzahl $p \in \mathbb{P}$ mit $G \cong \mathbb{Z}/\langle p \rangle$.
   (b) Die Menge der Fixpunkte unter obiger Operation enthält mindestens 2 Elemente.

2. Aufgabe Es sei G eine endliche Gruppe. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(1) Ist $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler und $U \subseteq G$ eine Untergruppe mit $|N| \cdot |U| = |G|$ und $\mathrm{ggT}(|N|, |U|) = 1$, dann gelten
   (a) $N \cap U = \{e\}$, und
   (b) die Isomorphie $G/N \cong U$.
(2) Ist G nicht auflösbar mit $|G| = 120$ und $U \subseteq G$ ist eine zu $\mathcal{S}_4$ isomorphe Untergruppe, so gilt $|\operatorname{Syl}_5(G)| = 6$.

3. Aufgabe Es sei $R \neq \{0\}$ ein kommutativer Ring, $a \in R \setminus \{0\}$ und X eine Unbestimmte über R.

(1) Zeigen Sie, dass $D := \{a^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ eine multiplikative Menge von R ist.
(2) Zeigen Sie, dass $u := a + (aX - 1) \in R[X]/(aX - 1)$ eine Einheit in $R[X]/(aX - 1)$ ist.
(3) Zeigen Sie die Existenz eines Ringhomomorphismus $\varphi \colon D^{-1}R \longrightarrow R[X]/(aX - 1)$ mit $\varphi(\frac{1}{a}) = u^{-1}$ und $\varphi(\frac{r}{1}) = r + (aX - 1)$ für alle $r \in R$.
(4) Zeigen Sie, dass $(aX - 1)$ ein Primideal von $R[X]$ ist, falls R ein Körper ist.
(5) Zeigen Sie, dass $D^{-1}R$ ein Körper ist, falls R ein Körper ist.

Sie dürfen in (5) ohne Beweis verwenden, dass der Homomorphismus in (3) ein Isomorphismus ist.

4. Aufgabe Es seien $R \neq \{0\}$ ein kommutativer Ringe, X bzw. Y eine Unbestimmte über R bzw. $\mathbb{Q}$ und $\varphi\colon R[X] \longrightarrow R[X]$ ein Ringautomorphismus.

(1) Zeigen Sie $\varphi(R[X]^\times) = R[X]^\times$.
(2) Zeigen Sie, dass ein Polynom $f \in R[X]$ irreduzibel in $R[X]$ ist, falls $\varphi(f)$ irreduzibel in $R[X]$ ist.
(3) Zeigen Sie, dass der Ringhomomorphismus

$$\psi\colon \mathbb{Q}[Y] \longrightarrow \mathbb{Q}[Y]\ ;\ \sum_{i=0}^{n} \alpha_i Y^i \mapsto \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (Y+1)^i$$

ein Automorphismus ist. Sie müssen hierbei nicht nachweisen, dass ψ ein Ringhomomorphismus ist.
(4) Beweisen Sie, dass das Polynom $g := Y^3 + Y^2 - 3Y - 1 \in \mathbb{Z}[Y]$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[Y]$ ist.
(5) Untersuchen Sie das Polynom g auf Irreduzibiltät in $\mathbb{R}[Y]$.

Sie dürfen in Teil (5) ohne Beweis verwenden, dass $\mathbb{C}$ ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{R}$ mit $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$ ist.

5. Aufgabe Wir betrachten die Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ mit Zwischenkörpern $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{3}), \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$

(1) Zeigen Sie, dass $[\mathbb{Q}(\sqrt{5}) : \mathbb{Q}] = 2 = [\mathbb{Q}(\sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$ gilt.
(2) Zeigen Sie, dass $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}] = 4$ gilt.
(3) Beweisen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung ist.
(4) Zeigen Sie, dass die Gruppe $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}) : \mathbb{Q})$ nicht zyklisch ist.

Sie dürfen in (2) und (4) ohne Beweis verwenden, dass $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ gilt.

6. Aufgabe Es sei $L : K$ eine endliche Körpererweiterung mit $L \neq K$, sodass für jeden Zwischenkörper $K \subsetneq Q \subseteq L$ ein $f \in K[X]$ von Grad $\deg(f) = 3$ existiert, das in $K[X]$ irreduzibel ist und in Q eine Nullstelle besitzt. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(1) Für jeden Zwischenkörper $K \subsetneq Q \subseteq L$ ist $[Q : K]$ ein Vielfaches von 3.
(2) Ist $L : K$ zusätzlich eine Galoiserweiterung, $l \in \mathbb{N}$ und 3^l ein Teiler von $[L : K]$, so existiert ein Zwischenkörper $K \subseteq Q \subseteq L$ mit $[L : Q] = 3^l$.
(3) Ist $L : K$ zusätzlich eine Galoiserweiterung, so existiert $d \in \mathbb{N}$ mit $[L : K] = 3^d$.

Hinweis zu (2): Denken Sie an die Sylowschen Sätze.