Daniel Bissinger **WS 21/22**
24.02.2022

Klausur zur Algebra I

Hinweise

- Diese Klausur besteht aus 6 Aufgaben in denen jeweils 10 Punkte erreicht werden können. Die mögliche Gesamtpunktzahl beträgt also 60 Punkte.
- Begründen Sie jede Ihrer Aussagen.
- Sie dürfen innerhalb einer Aufgabe einen vorangegangenen Aufgabenteil auch dann verwenden, wenn Sie diesen Teil nicht bearbeitet haben.
- Denken Sie bei der Abgabe Ihrer Bearbeitung daran das ausgefüllte Deckblatt mit einzureichen.

1. Aufgabe Es seien G eine Gruppe, $n \in \mathbb{N}$ und $U_1, \dots, U_n \subseteq G$ Untergruppen von G. Weiter sei $X := G/U_1 \times G/U_2 \times \cdots \times G/U_n$.

(1) Zeigen Sie, dass durch

$$G \times X \longrightarrow X$$
$$(g, (g_1U_1, \dots, g_nU_n)) \mapsto g.(g_1U_1, \dots, g_nU_n) := (gg_1U_1, gg_2U_2, \dots, gg_nU_n)$$

eine Operation von G auf X definiert wird.

(2) Es sei $x := (U_1, U_2, \dots, U_n) \in X$. Zeigen Sie

$$G_x = \{g \in G \mid g \in U_i \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

(3) Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen.
   (i) Die Untergruppe $U := \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ ist von endlichem Index in G.
   (ii) Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ existiert $l_i \in \mathbb{N}$ mit $|G/U_i| \leq l_i$.

Sie dürfen in (1) ohne Beweis verwenden, dass für eine Untergruppe $H \subseteq G$ die Zuweisung $G \times G/H \longrightarrow G/H, (g, xH) \mapsto gxH$ eine wohldefinierte Abbildung ist.

2. Aufgabe Es sei G eine Gruppe der Ordnung $|G| = 225$. Beweisen Sie folgende Aussagen.

(1) G enthält einen Normalteiler N mit $[G : N] = 9$.
(2) G ist eine auflösbare Gruppe.
(3) Ist G nicht abelsch, so existieren genau 25 Untergruppen der Ordnung 9.

Hinweis zu (3): Sind A,B abelsche Gruppen, so ist auch $A \times B$ abelsch. Diese Tatsache dürfen Sie ohne Beweis verwenden.

3. Aufgabe Es sei $R \neq \{0\}$ ein kommutativer Ring, $\{0\} \neq I \subsetneq R$ ein echtes Ideal von R und X eine Unbestimmte. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(1) $J := \{\sum_{i=0}^{n} r_i X^i \mid n \in \mathbb{N}_0, r_0, \ldots, r_n \in I\}$ ist ein Ideal von $R[X]$.
(2) Es existiert ein Isomorphismus von Ringen $R[X]/J \cong (R/I)[X]$.
(3) Das Ideal J ist kein maximales Ideal von $R[X]$.

4. Aufgabe

(1) Zeigen Sie, dass das Polynom $X^3 + 3X + 3$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist und untersuchen Sie das Polynom $f := 2X^3 + 6X + 6$ auf Irreduzibilität in $\mathbb{Z}[X], \mathbb{Q}[X]$ und $\mathbb{R}[X]$.
(2) Zeigen Sie, dass die Ideale $(X^3 + 3X + 3), (X) \subseteq \mathbb{Q}[X]$ von $\mathbb{Q}[X]$ teilerfremd sind.
(3) Zeigen Sie die Existenz eines Körpers K und eines Isomorphismus

$$\mathbb{Q}[X]/(\frac{64}{9}X^4 + \frac{64}{3}X^2 + \frac{64}{3}X) \cong K \times \mathbb{Q}.$$

Sie dürfen in Teil (1) ohne Beweis verwenden, dass $\mathbb{C}$ ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{R}$ mit $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$ ist.

5. Aufgabe Es sei $L : K$ eine endliche Körpererweiterung und $G := \mathrm{Aut}(L : K)$.

(1) Zeigen Sie, dass für $x \in L$ der Ausdruck $s(x) := \sum_{\varphi \in G} \varphi(x)$ wohldefiniert ist und $s(x) \in L^G$ gilt.
(2) Zeigen Sie, dass

$$s \colon L \longrightarrow L^G; x \mapsto s(x)$$

eine K-lineare Abbildung ist und ein $\alpha \in L$ mit $s(\alpha) \neq 0$ existiert.
(3) Zeigen Sie, dass s surjektiv ist, falls $L : K$ eine Galoiserweiterung ist.

6. Aufgabe Es sei $\alpha := \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $\beta := \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ und $L := \mathbb{Q}(\alpha) \subseteq \mathbb{C}$.

(1) Zeigen Sie $[L : \mathbb{Q}] = 4$, $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\alpha)$ und $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$.
(2) Beweisen Sie, dass $L : \mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung ist.
(3) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Aut}(L : \mathbb{Q})$ eine zyklische Gruppe ist.
(4) Zeigen Sie die Existenz eines eindeutig bestimmten Zwischenkörpers

$$\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq L$$

mit $[L : K] = 2$.
(5) Ist die Erweiterung $K : \mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung?

Sie dürfen in (3) ohne Beweis verwenden, dass in $\mathrm{Aut}(L : \mathbb{Q})$ ein Element φ mit $\varphi(\alpha) = \beta$ und $\varphi(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$ existiert.